现代应用数学丛书

工程力学系统

〔日〕近藤一夫 等著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

工程力学系統

〔日〕近藤一夫
石塚喜雄
大島信德
藤中惠 著

刘亦珩 譯

吳光磊 校



上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。主要內容是以近代微分几何学的观点来研究力学系統。

全书共分四章，第一章以旋轉电机的研究为中心，就几种常見的电机，解說分析的步驟及背景空間的构成方法；第二章利用旋轉电机和旋轉流体机之間的类似性，用对比方法，由对旋轉电机的分析，推出对于旋轉流体机的分析，进而推广到飞机的情形；第三章介紹非 Riemann 力学系統的一般理論；第四章討論实际力学系統中的各种复杂性质。另有附录二篇，其一是关于动态几何学的概觀，另一是关于向量記号的一个补充。

本书可供高等学校数学系、物理系师生以及工程技术人員作参考。

现代应用数学丛书

工 程 力 学 系 統

原书名 工学力学系

原著者 〔日〕近藤一夫 石塚喜雄 大島信德 藤中惠

原出版者 岩波书店

譯者 刘亦珩

校者 吳光磊

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 1 30/32 字数 42,000

1962年8月第1版 1962年8月第1次印刷

印数 1—5,000

統一书号：13119·483

定价：（十四）0.36元

緒　論

近代的动力机、运輸机及发动机等一类机器，不管原动力是机械的还是电力的，它們大多數都构成所謂力学系統。在古典力学里所見到的是力学系統的最单純的形式，依照古典的理論来对复杂的工业机器作一般的討論是困难的。1934年，Gabriel Kron在微分几何学的基础上成功地創立了旋轉电机的一套統一理論。特别是他将整流器的作用看作非完整变換，引起了理論上的新发展。

在此以前，发电机和电动机的理論是很不一样的，必須按着不同的类型，用所謂工程現場的方法分别作出不同的理論。文献的数量虽相当龐大，但却是不相联系的片断的堆积。若用Kron的見解，只須通曉一个基本旋轉机的性质，将接綫的变換表現成坐标变換，通过計算就可以了解所有类型的旋轉机的性质。他之所以能够成功，显然是因为他采用了探討图形不变性质的几何学方法。基本机就相当于不变图形，它的构成部分——各繞組的接綫关系的变化，就相当于坐标变换。在其他国家里，也有人作过这方面的考慮。例如Whittaker, Synge, Boltzmann, Hamel等都曾利用微分几何学研究过比較抽象的力学系統，而且作出不少貢献。但Kron不仅将从来专門用在相对論和統一場論里的高維曲空間及撓空間的理論和抽象力学系統联系起来，而且又进一步应用到工程实践中去；从而指出一向认为非常深奥的抽象知識又是怎样和人类的实际文化直接关联着。从理論工程学来說，Kron的工作是很有意义的。

随后，Kron又将基于这一思想的电工学研究作了进一步的发展。他的理論在各国虽也得到了不少的支持，但从事于这方面

研究的人却是很少的。造成这种情况的主要原因之一，固然是由于外貌难懂的張量分析和微分几何学的抽象理論使工程学家們望而生畏，不易接受；但另一方面，过于追求实用主义的美国也不会为这种高深的学术研究提供适当的条件。

日本的情况不能說就和那里的显然不同，在 Kron 理論創立的二十年后，我們还能看到类似的情况：尽管差不多同样的理論在电工学以外的其他部門也能成立，却很少有人加以注意。若将旋轉水力机和电机作一比較，就不难发現两者之間有下表里所列举的对应关系存在。

旋 轉 电 机	旋 轉 水 力 机
定 子	导 向 叶 片
轉 子	叶 片 輪
轉 子 繞 組	叶 片 間 隙
电 流	水 流
电 压	压力梯度(水头)
电 磁 能	靜压及水流运动能

总而言之，若作用在剛体上的能量，除了机械能以外，还有电磁能或流体运动能以及其他各种能量，而且不同的能量之間又有相互轉换，那末，这种力学系統的运动方程就将在某种程度上复杂化。但是由于非完整变换及撓率等概念的导入，却可以順利地归結到統一的几何学表現。又若变动部分的性质具有多样性，并且跟着时間和空間一起变动时（例如电机的电感及飞行机的舵面慣性等），那就非和 Riemann-Christoffel 曲率存在的空間結合起来考虑不可。

这样，就差不多将近代微分几何学的全部概念都用到工程力

学系統的研究里去了。現在各方面都在期待这样的研究将会发揮出显著的效果[1]。例如，Kron 最近(1957)又发現了同步发电机的高性能速度控制装置的理論背景，就是将猎振系数总起来看作 Riemann–Christoffel 曲率的这个几何学观点[10]。他自己曾説过：若沒有这种几何学的认識，就不可能对发电机內部的物理現象有这样确切的了解。

本书将按照旋轉电机、飞行机、水力机及有能量散逸和迟滞現象的力学系統的順序，尽量作比較淺易的說明。但最后一个問題目前仍在研究中，而且所用的几何学技巧也比較难掌握，这里只能說明一个大概。所以我們将具体分析的实例和力学常識的說明都放在第 1 章，就电机作比較詳細的叙述。和內容有关的一般几何学的說明，大体上也都分别插在各章的正文里。此外，有些认为还有用途的材料，則作为附录列在本书的最后。

第1章 电　机❶

§1 引　言

对于不同的电机，我們将討論其各构件間有相对运动的情形。静止电机可以当作可动电机的特例。比方說，各种发电机和电动机都是以旋轉为特征的，揚声器及受話器都是以綫性振动为特征的，但它們都代表可动电机。它們通常是利用力学現象和电磁現象間的相互关联引起动力，再将动力变形而加以控制的。

在通常的理論分析里，先給定电压及机械的外力，即所謂加入量，而后推求各构件中流通的电荷及运动部分的变位，即所謂应答量。这是問題的第一个阶段，求解是較困难的，但利用它的解来計算其他相关联的量，却是比較容易的。

1. 沿 革　人們都知道，电机各个独立电路里流通的电荷及运动部分的变位可以看成广义坐标，而将整个电机看成一个古典力学系統，所以在处理电机分析的問題时，自然会想到利用分析力学以期获得成果。但这种想法只有在将 Lagrange 运动方程应用到滑环式交流电机的分析的范圍里才有效，此外便无能为力了。至此，实际技术工作者便提出了与此无关的种种独特的工程学理論，这些理論对于上述及其他机器的分析形成了理論的主流。这种現象的发生也有其本质的原因。和工程力学系統里常遇到的对象一样，旋轉机是相当复杂的构件，仅用处理单純系統的朴素Lagrange力学，不可能将如此复杂的力学系統的所有各个方面都充分表示出来。

❶ 本章內容主要参看[2]，[3]，[4]，[8]。也可参看[9]。

其后，提出了直接結合高維空間微分几何的解析一元論来进行电机的研究，而且在相当短的期間达到几乎成熟的地步，这是出乎一般人的預料的。所以能得到这样成績的理由是很明显的，因为微分几何学是作为純粹演繹的一般理論而发展起来的，它本身虽也包含着不少矛盾，但却能够将电工学主要对象都概括起来。这一层虽然是 Gabriel Kron 的成績，但他所以能取得这样的成就也是和另外一些学者的工作分不开的。首先是 Hamilton，他使古典力学的一切成果和 Riemann 空間理論发生了联系，而后 J. L. Synge 等以微分几何来研究分析力学，作出了很大貢献。力学本身虽已由 L. Boltzmann 及 G. Hamel 等作了推广，使其具有可以应用到交流电机以外的电机分析上去的可能形式，但在 Kron 重新研究它以前，却一直被人們弃置不顾，这也是实在的情况。

这一新的理論規定了电机在非 Riemann 空間里的表現，所以在描繪該系統的特性时，撓率、曲率、測地綫以及測地离差等概念就起了重要作用。但需要注意的是，它的背景空間却和相对論及統一場論的时空认識毫无关系，只是为了分析考察的方便才将它引进的❶。

2. 优 点　我們可将这个思想的具体內容，特别是它的优点，概括如下：

在适当观点下可以看出，表面上看来是多种多样的机器，在本质上則是完全相同系統的各个側面。更具体地說，这是同一現象以不同坐标系观測的結果，或者是由于約束条件的差异所致。因此可用高維空間的張量方程来表現它們的普遍性，不必再就每个机器作各別的分析了。由此所节約的思維活动及計算上的劳力，随着現象的复杂化，也就越来越显著地表現出来。

---

❶ 第 4 章将多少借用一些相对論的物理概念，但在本章的問題里却不必考虑它們。

按照下表所指出的对应关系，显然可以看出：从探求电机的表現空間的几何性质所得的結果（它們在数学里大多是明显的），却能够运用到电工力学系統里而得到工程学的意义。因为所用的坐标系是任意的，所以可适用于任何接綫式的电机。用这种方法，工程学可从数学得到分析工具，数学可从旣知的工程学的事实揭示出空間的特性，这样互相启示，对于提高双方的认識都有很大帮助。而且这种情况并不局限于电机的情形，稍加修正，就可应用到第2章以后所說的其他种种工程力学系統。

电　　机	抽　象　空　間
机器构造特性	空間特性（撓率、曲率等）
机器的特性方程	空間曲綫
性能特性	空間曲綫的特性

§2 旋轉电机的基本构造和效能❶

旋轉电机通常是由一个轉子和一个定子所組成，在轉子和定子上各有若干繞組。

对于电动机来說，当这些繞組通入电流后，在定子和轉子間，由于电磁力的作用而产生驅动轉矩，使电动机开始旋轉。电动机一旦启动后，由于轉子和定子作相对运动而引起感生电压，这电压有和加入电压保持平衡的趋向。

对于发电机来說，当轉子由外力驅动而和定子作相对角变位时，就由电磁感应而产生电动势，使发电机发电。当发电机产生了电动势而有电流流通时，就显示出电动机的作用，所产生的电磁力有和外力轉矩平衡的趋向。

❶ 已具备旋轉电机基本知識的讀者可将本节略去，直接閱讀§3。

由此可見，发电机和电动机是具有相同构造的机器，它們的作用在本質上沒有区别。

1. 交流电压的迭加 在定子綫組所形成的均匀磁場 H 中，用角速度 ω 弧度/秒驅动和磁場方向垂直的轉子軸上的綫匝（图 2.1）。若选取綫匝中垂綫为基准綫，并取基准綫和磁通方向成 φ 弧度角的位置作为时間原点，則此时的感生交流电压为

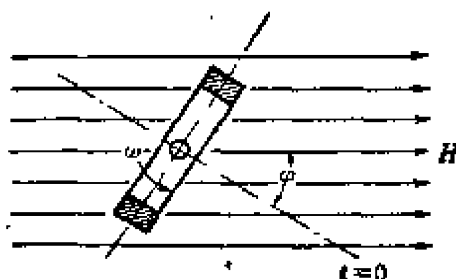


图 2.1

$$e=E_m \sin(\omega t-\varphi), \qquad (2.1)$$

其中 E_m 为綫匝中感生的电压的最大值，ω 为角速度，f 为頻率，其值等于 $\frac{\omega}{2\pi}$。这虽然是发电机的原理，但在实踐上为了增大空間的利用率，通常取 α 个相同形状的綫匝安置在等間隔的位置上。这样，在第 r 个綫匝上感生的电压为

$$e=E_m \sin \frac{\omega t-\overline{r-1}\cdot 2\pi}{\alpha-\varphi}, \qquad (2.2)$$

于是就产生了漸次滞后一个角度 $\frac{2\pi}{\alpha}$ 而具有同一頻率和同一最大值的正弦电压。若再将它們全部串联起来（这叫做閉路繞組），則在任意两点間所产生的电压就等于該两点間綫匝上产生的上述电压的总和。当将带有电动势的繞組的各綫匝串联起来，然后再将最終端和始端也連結起来的时候，繞組本身当然变成所謂短路状态，也就不能发生循环电流。这是因为繞組各部分所发生的电压各有不同的相位，所以围繞閉路繞組一周的电动势之和恒为零。这样，我們自这个閉路繞組任意点（例如图 2.2 的 A, B, C, …等）拉出綫头时，就可得到种种相位

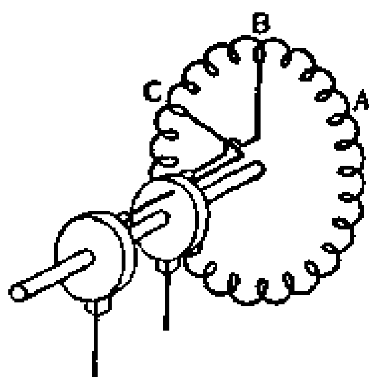


图 2.2

的交流电压。

若不考虑定子繞組的饋电引綫或自定子繞組引出电流的情形，那末按照轉子端綫和外部連接情况的不同，通常有滑环和整流器两种形式。

2. 滑 环 滑环是安装在轉子軸上的金属环，通过它和固定电刷的接触而和外部連接，如图 2.2 所示(图里小回路对应着一个綫匝，所以实际上每經过相差 π 弧度的位置才存在一个小回路)。此时，使轉子繞組的任意一部的两端各接到一个滑环上，就可将其間繞組的电压和由此而产生的电流傳导到电机的外部，而且不管怎样轉动，內外电流間并不发生任何相互变化。这样的旋轉机叫作滑环式电机。

3. 整流器 另一种連接形式是用整流器。在前一种情形，是将每个端头都和轉子軸上的一个金属环連接。現在的情形却不是这样，而是将繞組里的綫匝合并起来，然后如图 2.3 那样将它們分成若干組，又将絕緣了的金属弧片装在絕緣环上而形成一个整流器，再将对应綫匝的端头和整流器的各片連接起来就行了。在这时候，外部电刷上所流过的电流，随着轉子的轉动而与繞組中的状态不一样。

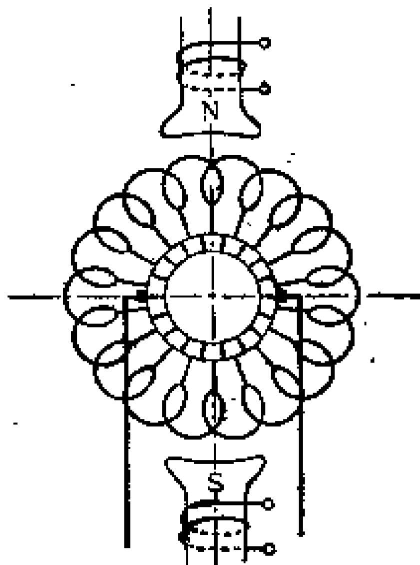


图 2.3

在定子所形成的均匀磁場里(图 2.3)，整流器的两个和电刷相接触的金属弧片間，出現的是交流电压，它等于該两片間 $\frac{a}{2}$ 个綫匝上所产生的交流电压的总和。随着轉子轉动时金属片所作的移动，各个綫匝上的电压，在零到最大値之間变动。若綫匝都有同一构造，那末順次連接金属片对，将得到完全相同的电流强度，这样重复下去，在两电刷間出現的交流电

压，几乎接近它的最大值。

因为电压的脉动是以一个金属片通过电刷的时間作为周期的，当綫匝数 α 的值十分大时，这个脉动却减少而趋于一个定值。这便是直流发电机。

若是反过来，从外部向整流器供給直流电压时，由这个电磁力产生的驅动轉矩就使轉子轉动。繞組中所通过的电流，每轉半圈就改变方向，所以随着磁場方向正負相間的变化，而产生一定方向的驅动力。換句話說，繞組电流虽然由于整流器的作用而周期性地改变方向，但出入繞組的电流方向却保持一定，所以經过这样整流的繞組电流，它所形成的磁場同样和轉动无关，其方向和整流器軸的方向相一致。

§3 完 整 机

首先叙述完整坐标及 Riemann 空間在旋轉电机分析上的应用。这是相当于 Lagrange 力学的。

1. Lagrange 方程 现在取双相交流发电机作实例来进行分析。它的构造是这样的(图 3.1)：在具有閉路繞組的轉子繞組上，将間隔各为 $\frac{\pi}{2}$ 弧度的任意两对接头 a–a' 及 b–b' 各与两組滑环連接起来，在定子上有磁場繞組 D–D'. 若命这两組轉子繞組以及磁場所形成的磁通方向各为 a，b，D，那末我們的未知量就是各繞組的电流及轉子的角变位，既知量就是設計常数和加在各繞組的电压及作用于轉子的轉矩。

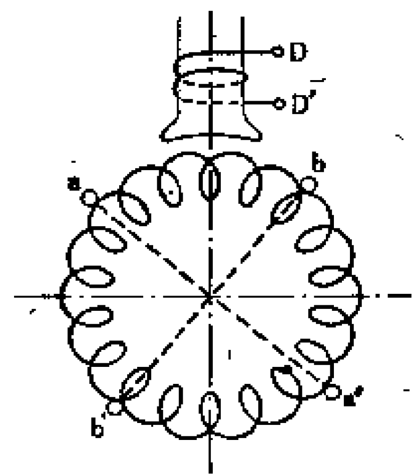


图 3.1

这种系統的动作恰好可用 Lagrange 运动方程表示出来。也就是說，各繞組、滑环和外部导綫的連接是不变的，所以可将其各个内部流通的电

流 i^a, i^b 积分起来而定义各繞組的电荷为 x^D, x^a, x^b. 若将它們和轉子的角变位 x^s (在若干情形都用 θ 来表示) 取作广义坐标，且命該系統在各瞬間具有的电磁能及动能的总和为 T，静电能及势能的总和为 U，则必有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial(T-U)}{\partial x^i}=f_i \quad (i=D,\ a,\ b,\ s). \quad (3.1)$$

这便是 Lagrange 力学所主張的。在此 f_i 是以繞組 D-D' 上所加入的直流电压及驅动轉子的轉矩为分量的量。

在一般情形，旋轉电机利用电磁力学作用而发电(或驅动)，所以电通所产生的静电作用几乎不存在，可以忽略不計。又轉子本身是軸对称的，和重力及純位能的現象不发生关系，因此可假定 $U=0$. 其次，电阻及机械摩擦所引起的能量消耗虽也存在，但为了說明电机的本质，也可将它們忽略，待以后有必要时再予考虑。这样，我們所考虑的能量就仅限于广义的运动能 T.

在这个 T 里，电气系統即磁場里所貯存的能，可由各繞組的电感及电流以公式

$$\frac{1}{2}L_{pq}i^p i^q \quad (p,\ q=D,\ a,\ b)$$

表示出来。轉动所生的机械能用轉子的慣性矩 I 及角速度 $\dot{\theta}=\frac{dx^s}{dt}$ 表示为

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2.$$

也就是說，利用

$$g_{ij}=\left(\begin{array}{c|c} L_{pq} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \quad (3.2)$$

就有

$$T=\frac{1}{2}g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=\frac{1}{2}L_{pq}i^p i^q+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \quad (3.3)$$

在此式里，对于 p, q 要取值 D, a, b 作总和，对于 i, j 要取值 D,

a, b, s 作总和❶。

对于給定的电机来說，轉子慣性矩当然是一定的，而 L_{pq} 是以图 3.1 的三組繞組的自感量及互感量为元素的矩陣，所以必随轉子和定子的相对位置而变，而且必須是 x^4 的函数。若随着轉子的位置变化而逐次測定 L_{pq}，則对于**理想旋轉电机**❷一般可得到

$$
L_{pq}' = \begin{matrix} & \mathbf{D} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix}
\begin{pmatrix} L_D & M_d\cos\theta & -M_d\sin\theta \\ M_d\cos\theta & A+B\cos 2\theta & -B\sin 2\theta \\ -M_d\sin\theta & -B\sin 2\theta & A-B\cos 2\theta \end{pmatrix}, \qquad (3.4)
$$

其中 M_d 表示 a 相繞組与定子繞組的磁軸相重时互感量的最大值，A 及 B 各为 a 相及 b 相繞組的电感实测值的常数項及按正弦变化的振幅的常数值。

这样看来，不仅互感而且轉子的自感也是 θ 即 x^4 的函数。这是在所謂凸极型电机（磁場鉄心，也就是定子鉄心不是图中表示的那种平滑的圓形）中常見到的現象，因为轉子繞組所生磁路的磁阻是随着对于凸极的相互位置而改变的。和此相反，在非凸极即圓筒型机的情形必有 $B=0$，所以仅有 A，叫作**电樞电感**，表示为 L_a。

如上所述，所有在运动方程里出現的量，都可用 x^4 和其时間导数来表示，所以当 x^4 固定时也就随之而定。于是 $\dot{x}^4$ 可以完全积分出来而定义 x^4，所以我們用几何学的术語将它叫作**完整机** (holonomic machine)。

2. Riemann 空間 Lagrange 方程

❶ 今后将采用同样的总和規約，这就是所謂 Einstein 总和規約，例如 $\alpha=1, 2, \cdots, n$ 时有 $v^\alpha w_\alpha = v^1w_1 + v^2w_2 + \cdots + v^nw_n$.

❷ 对于这样的旋轉机，不管轉子两繞組的磁通那一个是由电流所誘起的，它的分布总是設計得使之在磁軸上有最大值的正弦分布，而且可将繞組鉄心的非綫性性质加以忽略。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^j}=f_j \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4=D,\ a,\ b,\ s) \tag{3.5}$$

具有这样的几何意义:动能是基本的物理量,而二阶微分型

$$ds^2=2T\,dt^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{3.6}$$

却是几何学的不变式,其数学理論是四維 Riemann 几何学,x^i 是該四維 Riemann 空間的坐标。

将(3.6)代入方程(3.5)的左边,作詳細計算,得到

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{dt^2}+[jk,i]\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=f_i, \tag{3.7}$$

或

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)\equiv\frac{d^2x^i}{dt^2}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=f^i. \tag{3.8}$$

这两个式子,不仅对于四維情形,在一般 n 維情形也成立,此时 $[ij,\ k]$ 及 $\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}$ 各叫作 Christoffel 第一种及第二种三标記号,分别定义为

$$[ij,\ k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{3.9}$$

及

$$\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}=g^{ih}[jk,\ h]. \tag{3.10}$$

但在此有 $g^{ih}g_{hk}=\delta^i_k,\quad g_{ij}g^{jk}=\delta^k_i,$

而 δ^i_k 叫作 Kronecker 的記号,定义如下:

$i=k$ 时, $\delta^i_k=1;$

$i\neq k$ 时, $\delta^i_k=0.$

这些都是和 Riemann 空間有关的張量方程。特別是 g_{ij} 及 g^{jk} 各为这个 Riemann 空間的共变基本張量及反变基本張量,前者和电感及慣性矩是一致的。f_i 是外力的向量。特別当 $f_i=0$ 时,这个系統不受任何約束,这时它的运动方程

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0 \tag{3.11}$$

給出这个 Riemann 空間的測地綫，即将(3.11)积分而得的曲綫是其上二点間的短程綫。但 Riemann 空間内 P, Q 二点間的距离是

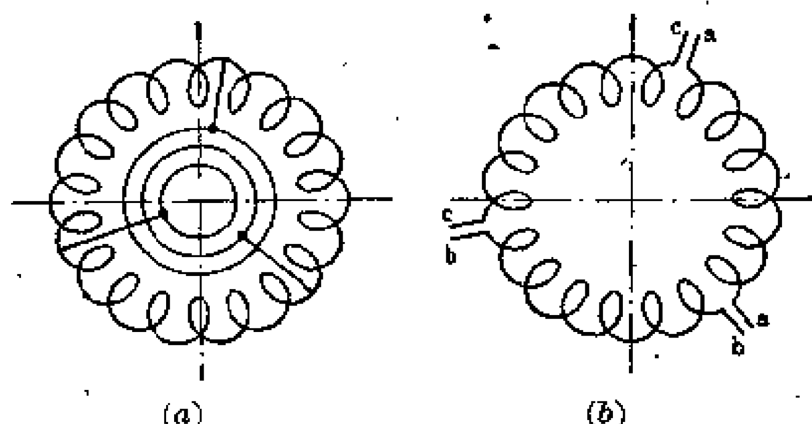
$$\int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j}.$$

3. 三相机与完整約束 我們将用完全相同的方法決定常用的三相交流同步机❶的 g_{ij}。

将閉路繞組上的任意三等分点和滑环連接起来，就得到所謂三角形接法的情形（图 3.2(a)）。在这三个点将繞組切断，如图 3.2(b)，再将三組繞組的 6 个綫端的每两个接到一个滑环上，各命为 a 相、b 相及 c 相。若使这些三相繞組固定起来而用磁場当作轉子，則它的 g_{ij} 可表示如下：

$$g_{ij}=\begin{array}{c} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{a} \\ \\ \mathbf{b} \\ \\ \mathbf{c} \\ \\ \mathbf{s} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \quad\mathbf{D}\quad & \quad\mathbf{a}\quad & \quad\mathbf{b}\quad & \quad\mathbf{c}\quad & \mathbf{s} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} L_D & M_d\cos\theta & M_d\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & M_d\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ M_d\cos\theta & A+B\cos 2\theta & -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2} & 0 \\ & & +B\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & +B\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & \\ M_d\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{A}{2} & A & -\frac{A}{2}+B\cos 2\theta & 0 \\ & +B\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & +B\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & & \\ M_d\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{A}{2} & -\frac{A}{2}+B\cos 2\theta & A & 0 \\ & +B\cos\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right) & & +B\cos\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array}\right)\end{array} \tag{3.12}$$

❶ 把三相交流同步机作为发电机使用时，需設置一个能保持一定驅动速度的調速机，使电动机与发电机具有保持同步的特性。



(a) (b)

图 3.2

当然 a, b, c 是三相坐标軸的标数，I 是慣性矩。在实际三相交流发电机的情形，不用三角形接法，也不象图 3.2 (b)那样取 6 个綫端，却将三个始端或三个終端連接到一起，再将所余的三端各接到一个滑环上，如图 3.3 所示的情形，这就是通常实用的星形 (star) 接法。在此情形，对于 (3.12) 所表示的系統就必須附加以如下的約束。

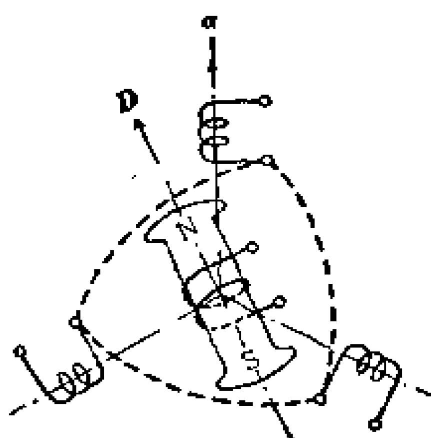


图 3.3

在前一种情形，三相繞組的每一个都形成独立的閉路，由外部阻抗所决定的电流应該各自独立地流过；但在星形接法的情形，按照 Kirchhoff 第一定律可知，在各接点上流入电流与流出电流应相等，所以必有关系式

$$i^a+i^b+i^c=0. \tag{3.13a}$$

这显然是对于电流的一个約束。若将 i^a, i^b, i^c 都看作广义坐标 x^a, x^b, x^c 的导数，則上式变为

$$dx^a+dx^b+dx^c=0. \tag{3.13b}$$

也就是說，所考慮的系統在广义坐标 x^D, x^a, x^b, x^c, x^s 所形成的五維 Riemann 空間里运动着，但却不能完全随意占有任意位置，必

須服从約束条件(3.13b)。所以这个系統被約束在将(3.13b)积分而得的四維流形

$$x^a + x^b + x^c = \text{const} \tag{3.14}$$

里边。

若采用这样約束空間里的坐标，亦即用可以自由变动的坐标 $x^{i'}$, $x^{j'}$, $x^{k'}$ 来表示时，就有

$$dx^i = B^i_{k'}\, dx^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} dx^{k'} \qquad (i=1,\cdots,5;\ k'=1,\cdots,4). \tag{3.15}$$

在前例內的 $B^i_{k'}$ 就是:

$$B^i_{k'} = \begin{array}{c|cccc} i \downarrow \ \backslash \ \rightarrow k' & \mathbf{D} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{s} \\ \hline \mathbf{D} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{b} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{c} & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \mathbf{s} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}. \tag{3.16}$$

这个子空間是度量二次微分型

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= g_{j'k'}\, dx^{j'}\, dx^{k'}, \\ g_{j'k'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} g_{jk} \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

所决定的 Riemann 空間，用不着再說明了。約束在这个子空間里的軌道方程是

$$g_{i'j'} \frac{d^2 x^{j'}}{dt^2} + [j'k',\ i'] \frac{dx^{j'}}{dt} \frac{dx^{k'}}{dt} = f_{i'}, \tag{3.18a}$$

或

$$\frac{d^2 x^{i'}}{dt^2} + \left\{ {i' \atop j'k'} \right\} \frac{dx^{j'}}{dt} \frac{dx^{k'}}{dt} = f^{i'}. \tag{3.18b}$$

在此，Christoffel 記号 $[j'k',\ i']$ 等等表示

$$[j'k', i'] = \left\{ \begin{matrix} h' \\ j'k' \end{matrix} \right\} g_{h'i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} [jk, i] + g_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}},$$

又 $f_{i'}$ 是
$$f_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} f_i,$$
也就是 f_i 在子空間里射影而得的分量。

这样說来，在回路接綫上每逢出現一个节点时，就可认为給原来的系統加上了一个約束。这个条件若是完整的，也就是积分后可仅用广义坐标表示时，則原来系統的自由度就減低了，所減少的度数和約束条件的个数相等。換句話說，所考慮的点在背景空間降低維度后而得到的子空間里运动，于是它的軌道曲綫只能用(3.18)表示出来。由此可以看出，若最初就在实际可能的范圍內設想具有最普遍构造的一个完整机，測定出它的阻抗及力学的慣性，从而决定了(3.2)所表示的形状的度量張量，則完整机的一切特性都将归結为坐标变換及約束条件的問題，而統一地記叙出来。此时对于每一个对象，例如由机器类别而生的差异等等，都可看作由于自由度、繞組配置、設計常数、彼此間的接綫亦即变換矩陣的元素、約束条件以及外力等所引起的有效成分，它們都可以用上述几何运算按一般形式的机器計算出来，所以可以說它們的一般性质和原来的一般机器并无差别。在这种意义下，我們可将原先所想定的机器叫作**原机**(primitive machine)。

对于由两台以上的机器組成的一个合成系統，也可完全类似地作出它的分析过程。比方說，考察两台三相交流机的三相綫端成串联的状态(例如由发电机給电动机輸电的情形)。首先設各机在独立状态时的自由度各为 p 及 q. 当然各机的度量張量是已知的，命为 $g_{\mathrm{I}\nu\gamma}$ 及 $g_{\mathrm{II}\kappa'\nu'}$. 取最初各机的 p 維及 q 維空間互补的子空間，而将两空間的各坐标系看作 $p+q$ 維空間里的相互直交的坐

标系，亦卽取

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} g_{\mathrm{I}i'j'} & 0 \\ 0 & g_{\mathrm{II}k''l''} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i,\ j=1,2,\cdots,p+q; \\ i',\ j'=1,2,\cdots,p; \\ k'',\ l''=1,2,\cdots,q. \end{matrix}$$

我們把对应相的电流相等这个要求取作約束条件，这个条件显然是完整的，于是可决定和(3.16)相似的联系矩陣

$$B^i_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

也就是說，这个系統的軌道曲綫是描画在 $p+q-3$ 維的約束子空間里，同样可用 (3.17)～(3.18) 表示出来。

§4 非完整約束及非完整机

前节曾考虑电流的約束条件，它們都是常系数的，例如(3.13)所表示的完整方程就是这样的。但一般約束条件是 $n-m$ 个綫性方程

$$K^u_k\dot{x}^k=K^u_k\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (u=1,2,\cdots,n-m), \tag{4.1}$$

其系数依存于广义坐标(在旋轉机的情形是 $x^s=\theta$)，此时，积分后就未必能表示成

$$X^u(x^k)=\text{const}$$

的样子。換句話說，这个約束不能得出簡单的 m 維 Riemann 子空間，它是非完整約束，它的約束空間叫作非完整空間。完全同样，不能积分出来的坐标微分間的变换

$$dx^{i'}=C^{i'}_j\,dx^j \tag{4.2}$$

叫作非完整变换。此时 x^j 叫作眞变数，$x^{i'}$ 叫作假变数。

卽使在分析和前节的完整力学系統相当的机器时，要想实际計算出它的特性方程(3.7)或(3.8)，也会得到极复杂的非綫性微分方程組；再想作进一步的分析就必須要有某些特殊措施。在这

些措施里,使用本节所說的非完整变换的方法,得到成功的机会較多,尤其現在所謂分析的技巧仅限于数学变换的操作,在这种情形更容易成功。但和此相反,整流器电机的实际构造和物理現象本身早已含有非完整的特性,也就是說,轉子各綫匝通过互相絕緣的金属片所构成的整流器片而与外部繞組連接,所以将繞組电流分成若干小段后再經过整流器片及电刷逐漸接連而形成一个新状态的电流(参照图 8.1)。这个事实用数学观点看来,恰好引起(4.1)以及(4.2)所指出的效果。

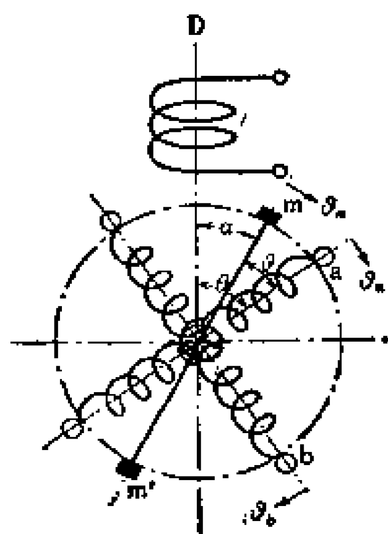


图 4.1

1. 非完整机 我們将取图 4.1 画出的推斥电动机为例。这种电机在它的旋轉电樞繞組上設有换向器,具有导綫 mm' 而形成永久短路。

按照工程学的慣例,在此将問題加以单純化,其自然結果是对于换向器所生换向作用及繞組电流和磁通的关系上,附加以如下的重要假定。

用几何学术語来說,若阻抗 L_{pq} 是 Riemann 空間的基本張量 g_{ij} 的分量,则电流 i^p 就必然是反变向量 $\dot{x}^i(i^p, \dot{\theta})$ 的分量,而且用关系式

$$\Phi_p = L_{pq} i^q = g_{pi} \dot{x}^i$$

所联系着的所謂交軸磁通 Φ_p 就是該向量的共变分量。所以在图 4.1 的推斥电机里,相应于 i^p 的自由度,Φ_i 的分量也只有电磁部分 Φ_D, Φ_m。而 Φ_m 又含有来自 i^D 的部分和来自 i^m 的部分,但后者是

$$\Phi_m(i^D = 0) = L_{mm} i^m.$$

在以旋轉軸为軸的圆柱面上,仅测定来自 i^m 的磁通分布时,可得到 Fourier 級数

$$\Phi = i^m \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

在此 θ 是自一定方向（例如自 D 軸）所測定的角。推斥电樞是圓筒形的，近似地可以假定它是 $n=1$ 而其余各項可略去的理想分布的情况。在 mm' 方向的磁通应該取极大值❶，而 mm' 的角距离 $\vartheta_m = \vartheta_m + \alpha - \alpha = \vartheta_m - \vartheta + \vartheta$，所以

$$\Phi = ki^m \cos \vartheta_m = k[i^D \cos(\vartheta_m + \alpha) + i^Q \sin(\vartheta_m + \alpha)]$$
$$= k[i^a \cos(\vartheta_m - \vartheta) + i^b \sin(\vartheta_m - \vartheta)].$$

在此，α 或 ϑ 各为自 D 軸或 a 軸到 m 軸的角（图 4.1），并且

$$i^D = i^m \cos \alpha, \qquad i^Q = i^m \sin \alpha,$$
$$i^a = i^m \cos \vartheta, \qquad i^b = -i^m \sin \vartheta.$$

特别当 $\theta_m = \frac{\pi}{2}$ 时，$\Phi = 0$，即

$$(-i^D \sin \alpha + i^Q \cos \alpha =) i^a \sin \vartheta + i^b \cos \vartheta = 0. \qquad (4.3)$$

也就是說，当图 3.1 的二相机的 i^a 及 i^b 滿足約束条件(4.3)时，就可以誘导出推斥电机。

按照交軸磁通的定义，

$$\Phi_m = R \int_0^{2\alpha} \Phi \cos \vartheta_m \, d\vartheta_m = kR\pi i^m,$$

得

$$L_{mm} = kR\pi,$$

在此 R 是圓柱面的半徑。

对于有这样約束的二相机，若用以四維空間作背景的联系矩陣

$$B_S^k = \begin{array}{c} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \mathbf{m} & \mathbf{s} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta - \alpha) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (4.4)$$

❶ 所謂整流器所生的換向現象，意味着：由几个轉子綫組在各个磁軸方向所生的磁通，随着旋轉虽可变更其方向，但借整流器却将它們固定在某一方向的作用。

作系数，则自

$$dx^k = B^k_\alpha dx^\alpha \quad (k=D,\ a,\ b,\ s;\ \alpha=D,\ m,\ s) \qquad (4.5)$$

可导出三維空間，所以表示出推斥电机特性的軌道曲綫是描画在这个三維子空間里的。

今約束条件(4.5)的 B^k_α 依賴于 θ，所以在檢查其可积条件

$$\frac{\partial B^k_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial B^k_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$$

时，显然看出(4.4)决不能满足这个条件。在此意义下，这个約束条件和 §3.3 的完整条件有区别，也就是説 B^k_α 不等于 $\frac{\partial x^k}{\partial x^\alpha}$，这便是本节最初曾提过的非完整約束。亦即它所定义的子空間不是三維超曲面，仅是在四維 Riemann 空間中的各点給定了三維方向的一个所謂非完整空間。所以在此情形，旋轉机的特性方程不能再照样使用 (3.18)，必須利用非完整空間論来求得下列方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = f^\alpha, \qquad (4.6a)$$

或

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2x^\beta}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma,\alpha} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = f_\alpha. \qquad (4.6b)$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ 及 f_α 等为

$$g_{\alpha\beta} = B^i_\alpha B^j_\beta g_{ij}, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha,$$

$$B^\alpha_i = g^{\alpha\beta} g_{ij} B^j_\beta, \quad f_\alpha = B^i_\alpha f_i,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\gamma\delta} \Gamma^\delta_{\alpha\beta} = B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma [ij,\ k] + g_{ik} B^k_\gamma \frac{\partial B^i_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

2. 假完整系 在 §4.1 所説的推斥电动机里，值得注意的特征首先是：

(1) 原机的 g_{ij} 仅依賴于 θ，也就是仅为 x^s 的函数。

(2) 联系矩陣 B^i_α 也同样仅为 x^s 的函数。

(3) 不管約束是完整的还是非完整的，x^s 仍然是独立变数

(参照于(4.4)的 s 坐标軸)。

这些特征即使在非完整系里也都是很特殊的东西。

在一般情形，当 B^{κ}_{α} 变更时，(4.5) 也应該定义不同的非完整机。我們現在假定:

(1) $g_{\alpha\beta}$ 仅依賴于 x^s。

(2) 两組电流假变数間的变換是联系矩陣仅依賴于 x^s 的綫性变換。

(3) 仅有 x^s 是真变数，且在变換前后都是真变数。

实际上作为电工学条件的外力 f_i，通常是和 x^i 无关的。以上所說的这些特性很接近于完整力学系統，所以将它叫作**假完整系統**，它和整流器(即換向器)有共同特征。事实上，就推斥电机实际計算(4.6)时，其結果可将 i^D, i^m, θ 都表示为时間 t 的未知函数的簡单联立微分方程。但此时是圓筒机，它和凸极机不同，其轉子各繞組的自感量及互感量都与 θ 无关。所以原机的 L_{pq} 可采用在(3.4)内取 $B=0$, $A=L_a$ 而得到的量。結果得到电压方程为

$$L_D p i^D + M_d \cos\alpha \cdot p i^m = e_D, \tag{4.7a}$$

$$M_d \cos\alpha \cdot p i^D - M_d \sin\alpha \cdot p\theta i^D + L_a p i^m = 0.$$

轉矩平衡方程为

$$I p^2\theta + M_d \sin\alpha \cdot i^D \cdot i^m = \tau. \tag{4.7b}$$

在此 $p=\dfrac{d}{dt}$，且 τ 是电机負荷，e_D 是輸入交流电压。

实际上机械系統比电机系統的时間常数大得多，所以多数情形可假定 $p\theta=\omega$ 为一常数。在这种場合里，轉矩的平衡方程(4.7b)仅意味着发生轉矩或負荷轉矩的平衡，只有电压平衡式形成仅和电流有关的联立常微分方程

$$\begin{pmatrix} L_D p & M_d \cos\alpha \cdot p \\ M_d(\cos\alpha \cdot p - \omega \sin\alpha) & L_a p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^D \\ i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_D \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. 非完整变換在非完整机分析的应用 現在我們将解說非

完整性概念的一个主要的用途，即机器本身虽具有完整构造，但也能导入非完整假坐标使其特性微分方程容易解开。

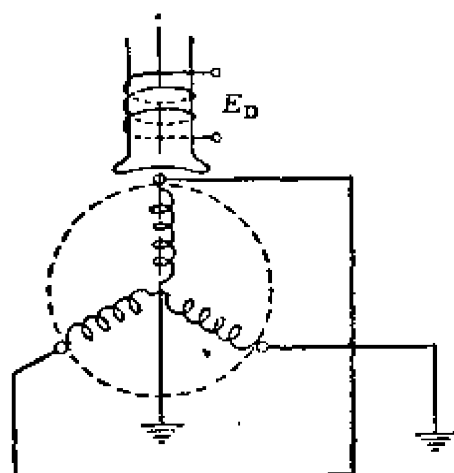


图 4.2

我們用接地式三相交流发电机(图 4.2) 作为例子。这时的独立坐标系是 Lagrange 广义坐标系 **D**, **a**, **b**, **c** 及 **s**，其基本張量为 g_{ij}，它是在(3.12)的三相的自感及互感内各加上相等的零相电感 $\frac{L_0}{2}$ 而得到的。所以它的特性方程是将这些值代入到(3.7)或(3.11)内所得的5个微分方程。但这些方程太复杂，即使同以前一样，将 $p\theta=\omega$ 看作常数时，仍然得到变系数的联立微分方程，将它們积分出来几乎是不可能的。

在此，若将 i^a, i^b, i^c 用电流变换所定义的 i^d, i^q, i^o 作变换

$$i^\alpha=\frac{dx^\alpha}{dt}\quad (\alpha=D,\ d,\ q,\ o;\ s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \text{新系标数})$$

时，則可設

$$dx^\alpha=C_i^\alpha\, dx^i,\quad |C_i^\alpha|\neq 0.$$

$$\begin{array}{c} \downarrow\!\rightarrow(i) \\ (\alpha) \end{array}\quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{D} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{s} \end{array}$$

$$C_i^\alpha=\begin{array}{c}\mathbf{D}\\ \mathbf{d}\\ \mathbf{q}\\ \mathbf{o}\\ \mathbf{s}\end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & \sin\theta & \sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

于是显然有

$$\frac{\partial C_i^\alpha}{\partial x^j}-\frac{\partial C_j^\alpha}{\partial x^i}\neq 0,$$

所以这个变换是一組不可积分的变换，即非完整变换。此时的特性方程，利用非完整变换可由关系式

$$g_{\alpha\beta}=C_\alpha^i C_\beta^j g_{ij},\quad f_\alpha=C_\alpha^i f_i,$$

$$C_i^\alpha C_\beta^i=\delta_\beta^\alpha,\quad C_i^\alpha C_\alpha^j=\delta_i^j,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}=g_{\gamma\delta}\Gamma_{\alpha\beta}^\delta=C_\alpha^i C_\beta^j C_\gamma^k[ij,k]+g_{ij}C_\gamma^i\frac{\partial C_\alpha^j}{\partial x^\beta}$$

$$=[\alpha\beta,\gamma]-\Omega_{\alpha\beta,\gamma}+\Omega_{\gamma\alpha,\beta}+\Omega_{\gamma\beta,\alpha}$$

得到和(4.6)同形状的标数为 α, β, γ 的5个分量的联立方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}=f^\alpha, \tag{4.9a}$$

或

$$g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\beta}{dt^2}+\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}=f_\alpha. \tag{4.9b}$$

但 $[\alpha\beta,\gamma]$ 是就非完整系基本張量 $g_{\alpha\beta}$ 所作的 Christoffel 三标記号。值得注意的是这时 $g_{\alpha\beta}$ 的构造和前述的 g_{ij} 及(4.8)比起来，仍然还有假完整性的特征。由实际計算得到

$$\begin{pmatrix} L_D & M_d p & 0 & 0 \\ M_d p & L_d p & \omega L_q & 0 \\ -\omega M_d & -\omega L_d & L_q p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_0 p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i^D \\ i^d \\ i^q \\ i^0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_D \\ e_d \\ e_q \\ 0 \end{pmatrix},$$

及

$$Ip^2\theta+M_d i^D i^q+(L_d-L_q)i^d i^q=\tau.$$

其中 $L_d=\frac{1}{2}(A+B)$, $L_q=\frac{1}{2}(A-B)$, $\omega=p\theta$, $p=\frac{d}{dt}$.

在这个結果里，应注意若只假定 $p\theta=\omega$ 为常数，则 $g_{\alpha\beta}$ 和其他电压方程的系数也都是常数，而且可簡化成关于 i^α 的分量的常系数綫性联立方程。由于这个假定，有 $p^2\theta=0$，于是轉矩方程取簡

单的形状。至于同步机的实际各相繞組的电流，利用 C_a^t 将这个系的解作逆变换卽可求得，不必再讲了。

如上所述，不管整流器式电机是交流的或者是直流的，若适当地选取原机，就可以不必管它的变换及約束取怎样形式，直接用 (4.9) 或 (4.6) 記述出它的特性来。于是在不具有整流器的电机上，也可能利用适当非完整变换，将其特性方程作常系数化处理，所以在实际分析上获得很大效果。特別是在导出 (4.8) 类型的式子时，效果更明显。

§5 $L, C; R$ 共存系

本节将叙述旋轉机和外部 L, C, R 同时共存的系統的分析。若仅局限在完整系統，則由前面說过的事实已經很明显，此时由观察卽可得到該系統外部的一个 L 矩陣，将它包括到旋轉机的电感矩陣里就行了。若这样作有困难或者复杂时，就必須先将該旋轉机所附随的 m 維基本張量 g_{ij} 及 n 維外部 L_{ij}，各看作子空間和补空間的基本張量，再求出它們的直和所作成的 $m+n$ 維空間，然后利用前边表示两个系統相互接綫状态的 Kirchhoff 方程，求出約束子空間在 $n+m$ 維空間里的联系矩陣就够了。由此决定的子空間就可以求得結合力学系統的基本張量，于是可以計算出它的特性方程(3.18)。

其次的問題是：这样的系統是否也能用非完整变换将其联立微分方程組变成常系数的。其解答大致如下：当外部多相元素平衡对称时，可証明这是永远可能的，也就是說，外部 L 矩陣由上列各条件施行簡单置换，可以让它包括在 (3.12) 的函数形状的特殊情况里。

1. 电阻 r 以下叙述电阻及轉子軸的阻力。

旋轉电机上若只有繞組，就必然存在电阻，而实际問題都是包

括輸电綫及电阻負荷系統的。我們都知道电阻 r 每秒钟将 $\frac{1}{2}\ i^2r$ 的能量化为热量散逸出去，所以电阻和电感同样可以看作是二阶的張量。若取 F 为散逸函数，此时的 Lagrange 方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^j}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^j}=f_j, \tag{5.1}$$

所以对应于(3.7)或(3.8)的形状，它可表示为

$$g_{kj}\frac{d^2x^j}{dt^2}+[ji,\ k]\frac{dx^j}{dt}\ \frac{dx^i}{dt}+r_{kj}\ \frac{dx^j}{dt}=f_k. \tag{5.2}$$

此时 r_{kj} 是以关于广义坐标的各电阻分量作为元素的量。若再假定轉子的机械耗損和上述散逸取相同的形状，则轉子的旋轉阻力是在 s 軸上取分量而作成的矩陣，它同样也是二阶对称張量。于是为了实用上的方便，对于变换可适用普通張量变换律。而且 r_{kj} 本来就是以非空間性常数作元素的，所以它在特性方程里只能作为綫性項出現，因此在实际解法上也沒有多大問題。又当它承受非完整变换时，还是在多相对称平衡系的情形，其結果仍然是常数，所以在解法上也不致发生多大障碍。在此成为問題的只是仅用純几何学观点时，如何将它和空間的基本張量融合起来，也就是說，在(5.2)内取 $f_k=0$ 时，以这个方程作为測地綫条件的空間是怎样的空間。这是目前有兴趣的問題之一，并且已見到一二件成功的研究(参照第3章)。

2. 电容 C 最后来考察电容 C。

由电容所产生的电通是在空間里蓄存的靜电能，当 x 表示电荷时，它可用 $\frac{1}{2}s_{kj}x^kx^j$ 表示出来(在此 s_{kj} 是 C_{kj} 的逆矩陣)。若想把它包括在力学理論里，那末它就可看作是和位能 U 相当的。所以对于完整系的 Lagrange 方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x^i}+\frac{\partial U}{\partial x^i}=f_i. \tag{5.3}$$

在此时若作几何化，则 U 仅由所考虑对象的結构来决定，因此将基本張量看作仅由广义运动的动能 T 的系数所决定，并且将 $\frac{\partial U}{\partial x^i}$ 看作外力是不很妥当的。也就是說，此时必須利用系数 γ_{ij}，使靜电容量和空間构造联系起来，才有可能作出完全的几何化。即是設

$$d\sigma^2=\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j=(E-U)g_{ij}\,dx^i\,dx^j,$$

又假定
$$E=T+U=\text{const},$$

則此时以 σ 为参数的测地綫方程，由无外力的情形可知必为

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2}+\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}_\gamma\frac{dx^j}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma}=0. \tag{5.4}$$

其中 $\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}_\gamma$ 定义为

$$\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}_\gamma=\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}-\frac{1}{2(E-U)}\left(\delta^i_j\frac{\partial U}{\partial x^k}+\delta^i_k\frac{\partial U}{\partial x^j}-g_{jk}g^{il}\frac{\partial U}{\partial x^l}\right). \tag{5.5}$$

但实际上选取以 σ 作独立变数的测地綫方程 (5.4)，不如选取时間 t 作参数来得方便，此时得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x^i}{dt^2}+\begin{Bmatrix}i\\jk\end{Bmatrix}_\gamma\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=\Phi\frac{dx^i}{dt},\\&\Phi=-\frac{1}{E-U}\frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}=-\frac{1}{E-U}\frac{dU}{dt}.\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

这样就可以說，将有靜电容量并存的系統已經几何化了。若前述的旋轉机在这个系統里存在，那末，在实际积分(5.6)的过程中仍然有必要作非完整变换，并且在这种情形，所謂假完整性已經不再存在了。所以即使假定轉子速度一定，也不容易进行分析。

最后就电通机器稍作一些說明。所謂电通机器就是前述电磁机的对偶机。例如蓄电器、揚声器等利用靜电容量的外压而生变化的机器，都属于这一类。它若和电磁現象并存而形成一个系統时，当然可以利用前述的由系数 γ_{ij} 所作的度量，但对于非并存系

統还有不少問題。特别是，对于象把振动膜的質量完全置之不管的純粹广义勢能的系統的情形，我們就可将它看作电磁机器的完全对偶系統，它的解法在适当条件下可作某种程度的对偶論述。

3. 阻抗 在前节那种系統的分析里，对于阻抗将如何处理呢？按照§4.2及§4.3的例，姑置静电系不論，即使对于有旋轉机的系統，也因为实际上可以不管速度的变化，所以只要不考虑鉄心的非直綫性，也可将它的特性方程变成电流的綫性方程。在这种情况下，阻抗的概念仍可使用。我們将阻抗写为

$$z_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{dt}=z_{\alpha\beta}i^\beta=e_\alpha \tag{5.7}$$

的形状。但在此 $z_{\alpha\beta}$ 是含有微分算子 $p=\frac{d}{dt}$ 的系統的阻抗矩陣，当然它不包含 x^α 及 i^α，即使在有旋轉机的情形，也由于前述常速度的假定而它仅能显含着 t. 所以分析这个系統时，只須着眼于电压 e_α 及电流 i^β，而且将它們看作 n 維非度量仿射空間的向量，将 (5.7) 看作表示該系統特性的不变張量的方程。对于表示普通接綫状态的变换和約束，事情当然是如此，而对于随着时間变化的接綫状态以至非完整变换的情形，它充其量不过是含有参数 t 的电流变换，所以 $z_{\alpha\beta}$ 仍然保持上述性质，因此也无須顾虑假完整性不存在的事实。在只处理常系数化及多相平衡系时，这总是可能的。

§6 动态系統

上面所說的完整系和非完整系都是靜态系統，现在来談談动态系統。如前所述，在旋轉电机的情形，Riemann 空間的基本張量仅是 n 个坐标 x^i 中的一个，即轉子角变位 θ 的函数，所以在常速度及 $\theta=\omega t$ 的假定下，它必然只能是 t 的显函数，也就是說这个系統是一个动态系統。又若使图 4.1 的推斥电动机的短路电刷作人为的移动，它的約束式 (4.4) 中的 α 就可以代替 t 的既知函数，

而变成动态約束了。

1. 特殊非完整动态系統 由上面的説明，大致可推想到我們将处理的动态系統多数是具有假完整性的。

作为一例，我們考虑从与轉子的速度不同的既知速度的运动坐标軸来观測一个机器的电磁现象的情形。設新系坐标是 λ, μ, ν, $\cdots$;1, 2, $\cdots$, n; 旧系坐标是 i, j, k, $\cdots$;1, 2, $\cdots$, n, 則由观測两系的磁通所得的关系是

$$dx^{\lambda}=C_j^{\lambda}(x^i,\ t)\,dx^j, \tag{6.1}$$

但决不能写成

$$x^{\lambda}=x^{\lambda}(x^i,\ t),$$

卽

$$dx^{\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^i}\,dx^i+\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial t}\,dt$$

的形状。于是可知这种情形一般也是非完整系統。对于这个系統可将(6.1)看作是表示强向量的（参照附录説明）。如果在向量共变微分也保持强向量性的条件下来决定联絡参数，則这个系統的特性方程可表示为

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{dt^2}+\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}+\Lambda_{\mu}^{\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}=f^{\lambda}, \tag{6.2a}$$

或

$$g_{\lambda\mu}\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2}+\Gamma_{\mu\nu,\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}+\Lambda_{\lambda\mu}\frac{dx^{\mu}}{dt}=f_{\lambda}. \tag{6.2b}$$

在此有

$$\Gamma_{\mu\nu,\lambda}=g_{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}=C_{\mu}^{i}C_{\nu}^{j}C_{\lambda}^{k}[ij,\ k]+g_{kj}C_{\lambda}^{k}\frac{\partial C_{\mu}^{j}}{\partial x^{\nu}},$$

$$\Lambda_{\lambda\mu}=g_{\lambda\nu}\Lambda_{\mu}^{\nu}=C_{\mu}^{i}\frac{\partial C_{\lambda}^{j}}{\partial t}\,g_{ij},$$

$$g_{\lambda\mu}=C_{\lambda}^{i}C_{\mu}^{j}g_{ij},\quad f_{\lambda}=C_{\lambda}^{i}f_i,$$

$$C_{\mu}^{i}C_{j}^{\mu}=\delta_j^i,\qquad C_{\mu}^{j}C_{j}^{\nu}=\delta_{\mu}^{\nu}.$$

利用上列这些式子，可使 Riemann 空間里所取的完整坐标，仍然有效地使用在自不同速度的假坐标观測的电机分析里。

2. 应 用 上述的方法，可以很便利地应用于如下各方面：在以同步速度为中心的脉动状态下，討論同步机元件的各频率的分量的問題；討論多相靜止回路电流对于固定频率的旋轉机的磁极的影响問題等。此外我們还可考虑非完整的动态子空間，其应用的方面也很多，例如在送电系統发生突然故障时，多相不平衡非对称系統的分析等。这种系統的分析，要和前面一样地导入非完整系是不可能的。但若假定旋轉机是常速度的，再应用某些动态系統的性质，也可求得它的近似解，这里就不再作詳細說明了。

§7 总 結

本章簡略地介紹的微分几何学在电力系統分析上的一些应用，概括起来可以看出，它們都是以 Lagrange 广义坐标作出发点的，通过最小作用原理首先与 Riemann 空間发生联系。至于非完整系統、靜态或动态系統等等，也都是由于 Riemann 空間的变换或約束以及附加上一些特殊条件而产生的。所以各种各样的电机都可看成是由原机加上不同的坐标变换和約束条件而形成的，可以利用張量方程的不变性作統一的分析。但在此值得特别指出的是 G. Kron 所首創的在張量分析应用上的一个指导原理。

我們的解說虽以微分几何的应用为主，但在統一地建立分析理論以外，还說明了指向解法的某些事实。当然随着系統的复杂化，时常可遇到需要很大演算劳力的实际問題，有时也会碰上簡直不容易求得解析解的其他非綫性問題。

針对这种情况，Kron 提出了应用張量分析的結果而得到的新的**等价回路理論**，借此可以机械地处理許多問題[5]。特別在稳定度問題上，使用过去的方法是不能找到等价回路的，但用張量

方程却可巧妙地得到一般解答。这明白地指出了这种理論的优点[10]。由此也可理解新方法在实用上的重要性。在同一假定下，張量分析法和过去方法虽然都能得出同一結果，但前者和古典方法的重要差别就在于表現成張量形式时恒能表示物理的实在量。例如在張量方程里时常含有实际計算中可以相互抵消的項，但在古典方法里从开始就只写出这些項抵消后的結果，而作成理論。所以作数值計算时，古典方法似乎簡单些，但張量分析方法正因为含有这些表面上似乎多余的項，可使它們和其他的量适当地配合起来而形成一个物理的实在張量。因此可将它直接化成等价回路，而且实际上也可将它构造出来。也就是說，在这个問題上 Kron 打破了所謂解析理論的框框，向着設計理論迈进了重要的一大步，这是値得特别提出的。

第2章　流体机及飞行机

§8 渦輪流体机❶

若将前节讲过的两种代表类型的旋轉电机，即滑环机（完整机）和整流器机（非完整机）的特性方程比較一下，則前者是

$$\ddot{x}^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \dot{x}^j \dot{x}^k = f^i,$$

后者是

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = f^\alpha.$$

其主要差别在于 $\dot{x}^i$ 或 $\dot{x}^\beta$ 的二次項的系数 $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$ 及 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$。若命

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} + L^\alpha_{\beta\gamma}, \tag{8.1}$$

則由 §4 可知必有

$$L^\alpha_{\beta\gamma} = -\Omega^\alpha_{\beta\gamma} + g^{\alpha\delta}\Omega^\varepsilon_{\beta\delta}g_{\varepsilon\gamma} + g^{\alpha\delta}\Omega^\varepsilon_{\delta\gamma}g_{\varepsilon\beta}. \tag{8.2}$$

第一种情形的背景空間是 Riemann 型的，而第二种是非 Riemann 型的。

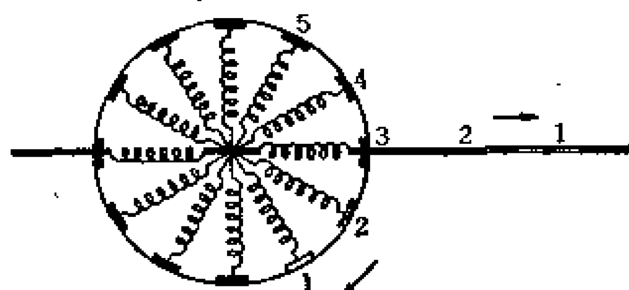


图　8.1

由于整流器的存在，出現了系数 $L^\alpha_{\beta\gamma}$。因为整流器将轉子各繞組电流切断，然后再将从相异繞組順次取得的电流連接起来而形成电刷电流（或其逆电流）（图 8.1，在图内粗的实綫表示电流，箭头表示

❶　此处的渦輪流体机不仅指的渦輪泵，而是一类机器如軸流鼓风机、渦輪机、螺旋桨推进器等的总称。

电流方向，数字是繞組的番号)。

若能看到对于流体机的水流、气流或蒸汽流也有同样事实成立，則可預想这种机器的运动方程也必含有相当于 $L^{\beta}_{\beta\gamma}$ 的項而为非 Riemann 型的。

1. 渦輪流体机的非完整特性 在上述意义下，和旋轉电机最类似的流体机是緒論里曾提到过的渦輪泵及渦輪机。例如蒸汽渦輪机的噴嘴及叶片輪和导向叶片的配列(图 8.2(*a*))。在实际构造中，这些噴嘴和可动的及静止的叶片列都安装在轉子圓筒的周圍，所以图上的粗箭头的方向是和圓周一致的。

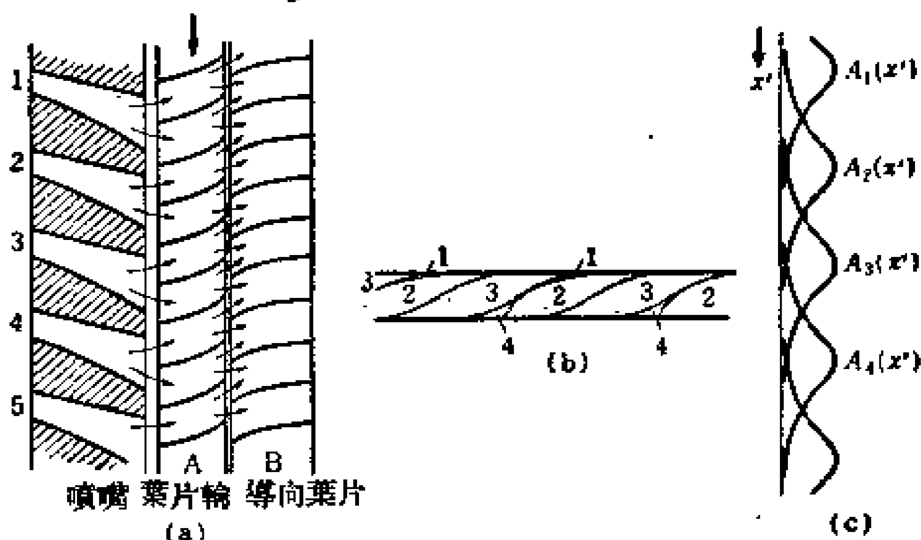


图 8.2

蒸汽自左側噴嘴通过叶片輪 A 及导向叶片 B 的叶片列間隙而达到右側，經过图上細箭头所示的流路而分配到各个間隙。噴嘴和导向叶片組成的定子与叶片輪的相对位置，在一定周期內又复归到同一状态。所以在右方流出的气流中，各噴嘴所噴出的部分也是順次按周期互相交替的，如图 8.2(*b*)，由各噴嘴来的蒸汽，一度切断后再相互接連起来而流出。这种情形恰好和由整流器电刷流到外部导綫的电流的形式完全类似(图 8.1)。噴嘴叶片輪里进入的蒸汽的分配，相当于图 8.1 的左側电刷的电流的切断，这就

不必細讲了。

达到右側的流体大致是按照图 8.2(c) 那种情况分配的。在此，$A_1(x')$，$A_2(x')$，… 等各为自噴嘴 1, 2, … 来的蒸汽的分布函数。它們不仅依存于測定位置 x'，而且还依存于定子和叶片輪的相对位置，卽叶片輪的角变位 $x^s(=\theta)$。所以将分布函数写成

$$A_k(x', x^s) \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

的形状，則在单位时間內通过 x' 点的一定截面积(例如叶片間隙面积)的流量是

$$q(x', x^s)=A_k(x', x^s)q^k.$$

q^k 是单位时間內通过噴嘴 k 的流量。若用导向叶片 B 的叶片間隙的番号 $k'=1', 2', \cdots$ 代替 x'，且将 $A_k(x', x^s)$，$q(x', x^s)$ 写成

$$A_k^{k'}(x^s), \quad q^{k'}(x^s),$$

則由

$$q^{k'}=A_k^{k'}q^k \tag{8.3}$$

可定义假变数 $dx^{k'}$，但(8.3)或

$$dx^{k'}=A_k^{k'}dx^k, \qquad x^k=\int q^k dt \tag{8.4}$$

却不能积分出来。将 x^k 当作噴嘴流量是可以測定的，所以它和 $x^s=\theta$ 都可当作眞变数处理。通常有

$$\Omega_{k's}^{k'}=\frac{1}{2}A_{k'}^{k}\frac{\partial A_k^{k'}}{\partial x^s}\neq 0,$$

所以(8.4)是非完整变换。又因 x^s 是眞变数，所以用

$$x^s=\theta, \quad dx^k$$

所表示的这个系統是假完整力学系統。

同样事实不仅对于蒸汽渦輪机成立，而且对于水力渦輪机、渦輪泵、軸流鼓风机、螺旋桨推进器等所有渦輪机都能成立。显然可将它們的流体方程看作以(8.1)的 $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 为联絡系数的非 Riemann 空間里的軌綫。

2. 运动方程和能量 对于仅具一个叶片輪的轉动渦輪机，其运动方程归結为

$$\text{轉矩方程：}\quad L\dot{\omega}+R\omega-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta}+\Lambda_{ij}\right)q^iq^j=\tau, \qquad (8.5)$$

$$\text{推力方程：}\quad \left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta}+\Lambda_{ij}\right)q^iq^j=f,$$

$$\text{压力方程：}\quad g_{ij}\dot{q}^j+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\theta}q^j+\Lambda_{ij}q^j\omega=-\varepsilon\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

(詳細情形可参照文献[11]，[12])。在此 p 是压力，g_{lk} 是流路內的质量，L 是轉子慣性，R 是机械的摩擦阻力系数，Λ_{lm} 是水力系数；在 $-L_{\beta\gamma,\alpha}$ 中，$\beta=l$，$\gamma=m$ 及 α 是和选作轉动变位及軸向变位(实际等于零)的自由度的情形相当，ε 是流路形状所定的常数。

若設叶片列具有均匀构造，則

$$g_{ij}=\gamma\delta_{ij},$$

γ 是常数，δ_{ij} 是 Kronecker 記号。

檢查剛体轉动能和气体（或水流）能量的轉換情况就可看出，在全系統的能量平衡方程里并不出現 Λ_{lm} 所生成的項。也就是說，在单位时間內自气流(或水流)移到叶片輪去的能量是 $\omega\Lambda_{ij}q^iq^j$，而且这些能量用在发生流体力学的轉矩 $\Lambda_{ij}q^iq^j$ 上。这个关系和旋轉电机的发生电压及发生轉矩間的关系完全类似。

§9 飞行机力学

当飞行机的运动方程包含空气力的項时，它就也有非 Riemann 型的特性。但机翼却不象渦輪机那样排列成无限叶片列的形状，所以和前述情形不同，它和第1章的类比也不那样容易作出，于是非另想考察的方法不可。但一般說来，大体上是很相似的，并沒有本质上的差別。

重要的問題是怎样使空气力和系数 $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 发生联系，以及如何

将飞行机看作刚体时的6个自由度和各舵面自由度的惯性总起来定为度量張量。

1. 单翼的空气力学特性 我們設想将机翼那种非对称形状的物体 A 放置在均匀平行流里，通常在它表面上作用着摩阻力，流体在其周圍落在后边。所以在测定机翼后方垂直于流面上的速度分布时，就得到图 9.1B 的情形。于是在尾流以及洗流外边界上的流体分子排列，时时都在发生滑錯，这是很重要的类似。若机翼在静止流体内前进，就如图 9.2(a)，(b)，(c) 所示，原来在 (a) 的一部分流体

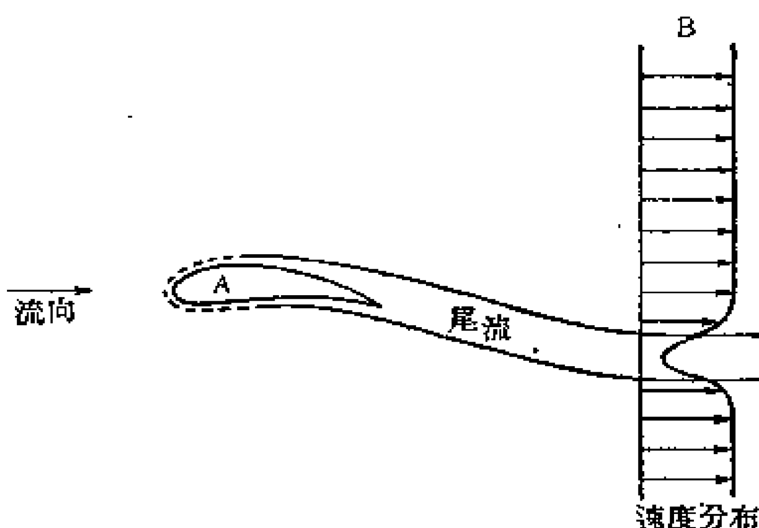


图 9.1

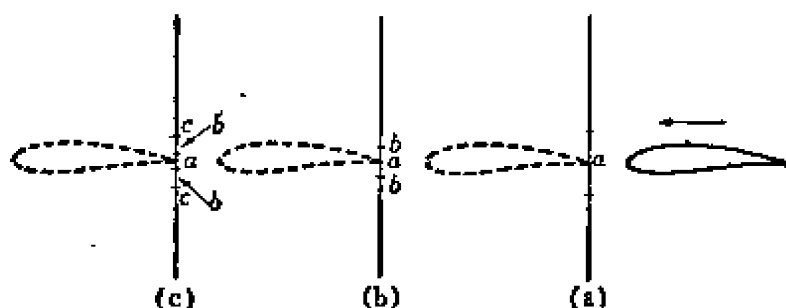


图 9.2

a 順次来到 (b)，(c) 的位置，原来在 b 的一部分流体来到 (c)，…，象图所表示的那样連接起来。这便产生一种非完整联絡的效果，它在运动方程里引进相当于 $L^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}$ 的項。

从力学的观点来看，这个翼受有阻力 (drag) 和升力 (lift) 两种力的作用。阻力是由粘性摩阻等引起的，升力 (横力) 则是由非对称形体，特别是尖銳后緣非对称地向着一側所引起的。这些流体力学的反作用力 f，是与流体密度 ρ 及速度 V 所确定的和压力有同一量綱的量 $\frac{1}{2}\rho V^2$ 及翼面积 S 成比例的。因为力及速度都是

向量，所以通常有关系式

$$\mathbf{f}=\frac{1}{2}\rho\mathbf{q}\mathbf{q}:\chi\mathbf{S}, \tag{9.1}$$

或

$$f_\alpha=\frac{1}{2}\rho\chi_{\beta\gamma,\alpha}q^\beta q^\gamma S.$$

在此 S 是翼面积，三标数的量 $\chi_{\beta\gamma,\alpha}$ 是无量綱的，在普通条件下它仅由物体的形状所决定。在(9.1)内将它当作三重量处理，并采用 Gibbs 的向量运算記号，也就是說取三直交坐标軸的方向的单位向量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$，則有

$$\chi=\chi_{11,1}\mathbf{iii}+\chi_{21,1}\mathbf{jii}+\chi_{23,1}\mathbf{jki}+\cdots$$
$$\mathbf{q}=\mathbf{i}q_x+\mathbf{j}q_y+\mathbf{k}q_z.$$

若取第一軸(x 軸)平行于主流，則速度分量为

$$q_x=U,\quad q_y=q_z=0.$$

若物体(翼)左右对称(关于 x-z 平面)，則 $\mathbf{f}$ 的 y 分量为零，而有

$$\mathbf{f}=\frac{1}{2}\rho U^2(\chi_{11,1}\mathbf{i}+\chi_{11,3}\mathbf{k})S.$$

在此情形

$C_L=\chi_{11,3}$　是所謂升力系数，

$C_D=\chi_{11,1}$　是阻力系数。

2. 飞行机的运动　前节已将无限长的翼当作二維翼考察过了。实际飞机的翼都是有限的，而且断面又到处不同，还有輔助翼和其他可动部分，所以对它所作用的空气力也就复杂得多了。而在主翼以外还有舵面、安定面、机身及起落架等也都承受着种种空气力，但总起来若都看作空气力，則每逢增加一个自由度就在运动方程里引进形状如 $L_{\beta\gamma,\alpha}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma$ 的一个项。在另一方面，飞机体的慣性随着舵面位置以及由机体剛性程度决定的彈性变形等而发生种种变化。考虑彈性变形是比較麻煩的，但只管舵角变化时，則变形的自由度是有限的。所以把慣性矩綜合起来可得到張量 $g_{\alpha\beta}$，但

α, β 是就所有自由度取值的。在电机含有磁惯性（阻抗）的情形，我們作微分几何学的考察时，取它作度量基本張量，更取 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 为联絡系数而研究出这个系統的若干性质，所以取这种空間当作背景空間而研究它里面的軌道是很方便的。

由此可知飞机的力学也可和旋轉电机及渦輪流体机同样作平行的論述。船舶等大致也可同样处理，但稍有差别，这是由于阻抗及流路內水量的不同所引起的。流体力学的自由度难于直接处理，所以产生只有剛体惯性才算作自由度的印象。而这种流体力学的自由度，在飞机的情形还和力学的系数对于加速度的依賴性有关，在船舶的情形又和横搖时的有效质量有关。正因为必須补充上这些工程技术的方法，所以自由度就更加复杂了（参照文献[11]及[12]）。

第3章 非 Riemann 力学系統一般理論

§10 非 Riemann 力学的目标

現在已經可以理解

1. 为什么可以将力学用几何学表达出来?

但在此还必須回答如下的三个問題:

2. 为什么实际力学系統有难于几何化的?

3. 将所有力学問題都包含在几何学里是否可能?

4. 那种几何学本质上最有效?

問題 2 的解答应該属于第 4 章。問題 3 及 4 由于共同的理由通常多被人們所忽视，卽以往的純粹数学过于追求形式美，而和非对称力学的現实一致的几何学并不那样美。至于問題 2 所提出的困难之所以发生，固然是由于非考虑度量空間不可，更由于外力及散逸(阻力)的項都是非对称形状的，将它們考虑进去的几何学还沒有用明确的形式提出来，这可能也是重要原因之一。本节将考虑克服这个困难的对策。

1. 道路仿射微分几何学 通常設 $n(=m+1)$維空間的坐标为

$$x^\varkappa \quad (\varkappa=0,1,\cdots,m),$$

而且将 n 个联立二阶常微分方程

$$\frac{d^2x^\varkappa}{d\tau^2}+\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}=0 \tag{10.1}$$

叫作**道路方程**，τ 可看作沿該方程的任意一条积分曲綫所測定的参数，$\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ 是 $x^\varkappa$ 等的解析函数，关于 λ 及 μ 是对称的。例如 Riemann 空間里的道路是微分方程

$$\frac{d^2x^\varkappa}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}=0$$

所决定的测地綫，在此情形有 $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}=\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}$，且 s 是沿着道路所测的距离。

若将 τ 变成沿积分曲綫所测的另一参数 t，则(10.1)可写成

$$\frac{d^2x^\varkappa}{dt^2}+\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^\mu}{dt}=\Phi(t)\frac{dx^\varkappa}{dt}, \tag{10.2}$$

此处
$$\Phi(t)=\frac{\dfrac{d^2\tau}{dt^2}}{\dfrac{d\tau}{dt}}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right).$$

然而卽使取 t 为时間，实际力学系統的运动方程为

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}+r^\beta_\gamma\frac{dx^\gamma}{dt}=f^\alpha, \tag{10.3}$$

所以若不作适当变化不能使(10.2)及(10.3)取同一形状。为此，設

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,m;\quad \varkappa,\lambda,\mu=0,1,2,\cdots,m\qquad (n=m+1),$$

及
$$\varkappa^0=t=\tau,\quad x^\alpha=x^\alpha,$$
$$\Gamma^\alpha_{\beta0}+\Gamma^\alpha_{0\beta}=r^\alpha_\beta,\quad \Gamma^\alpha_{00}=f^\alpha,$$

则有
$$\Phi(t)=0.$$

于是(10.2)恰好与(10.3)取同一形状。

这样就可将力学表示成取 $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ 作联絡系数且維度比自由度多1的仿射联絡空間里的道路几何学。

2. 度量張量 在§10.1的几何学里并未給慣性張量 $g_{\alpha\beta}$ 以任何特殊意义。但若考虑 $g_{\alpha\beta}$ 在力学上的重要性时，我們希望适当选定一种几何学能够簡单地处理这个張量。因此，对于 $g_{\alpha\beta}$ 及 $g^{\alpha\beta}$ $(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma)$，定义 m 維絕对微分运算子 D_γ 为

$$D_\gamma g_{\alpha\beta}\equiv\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}-\Pi^\delta_{\gamma\beta}g_{\alpha\delta}-\Pi^\delta_{\alpha\gamma}g_{\delta\beta}=0,$$

即　　$-Q_{\gamma\alpha\beta}\equiv D_\gamma g_{\alpha\beta}=0,\quad Q_\gamma^{\cdot\alpha\beta}\equiv D_\gamma g^{\alpha\beta}=0.$

于是对于这种运算子 D_γ，可将 $g_{\alpha\beta}$ 当作常数处理，这就方便得多了。Riemann 空間里的絕对微分就是这种运算的一例。

若由下式

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}-S^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot\gamma}-S^{\cdot\alpha}_{\gamma\cdot\beta}$$

及

$$g^{\rho\alpha}g_{\beta\sigma}S^{\cdot\cdot\sigma}_{\gamma\rho}=S^{\cdot\alpha}_{\gamma\cdot\beta},$$

导入关于二下标反称的張量 $S^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}$，則

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}-S^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot\gamma}-S^{\cdot\alpha}_{\gamma\cdot\beta}+S^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}$$

就能滿足所要求的条件。$\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ 和 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 具有同一对称部分，所以在(10.3)里可用 $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ 代替 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$，于是对于标数上下的計算就容易得多了。

反称張量 $S^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}$ 叫作**撓率張量**❶。

§11　攝擾及穩定度

以上将力学系統的軌道即状态变化的因果关系和測地綫或道路方程等几何概念联系起来，用第1章和第2章的实际計算，对于电机、水力机及飞行机作了定性的和定量的分析。利用这种分析一旦将正規軌道决定后，当然就要进一步考虑偏离軌道的运动問題。

将稍微偏离正規軌道的运动的穩定和不穩定、減衰增大等問題当作力学問題来考虑，特别对工程学有重要意义。又和这些問題相对应的几何概念測地离差与所謂 Riemann-Christoffel 曲率張量也相互联系着，所以它是属于早就被几何学及工程学所重視的应用几何部門里的問題。

❶ 參照本丛书《有限变位彈性論·变形几何学》一书中变形几何学部分。

我們可以举出电工学上的下列应用当作具体例子：同步机系統的定态稳定度及猎振的終熄和发展的判定，系統由于突发故障而引起的同步超稳定度的分析等。完全同样地，机械力学上所謂动的稳定問題也可用这个观点来討論，特别已經看到航空力学里飞机的微小运动方程也仅是測地离差問題。目前用工程学方法还不能作統一論述的直綫飞行的动稳定問題和所謂回旋下降的稳定度問題等，用我們的方法都可作綜合处理。

1．測地离差 在一条道路的力学系統的軌道的近傍存在另一条道路，而它又是力学系統的一条軌道时，这种曲綫存在的条件实际求出来就是

$$\frac{D^2\tilde{\omega}^\varkappa}{dt^2}+R^\varkappa_{\nu\mu\lambda}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^\mu}{dt}\tilde{\omega}^\nu=0 \qquad (t=\tau). \tag{11.1}$$

$\tilde{\omega}^\nu$ 表示离开原来軌道的偏差的微小向量，而且

$$R^\varkappa_{\nu\mu\lambda}=\frac{\partial\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial\Gamma^\varkappa_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}+\Gamma^\varkappa_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}-\Gamma^\varkappa_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{11.2}$$

是所謂 Riemann–Christoffel 曲率張量，除去撓率張量外，它是 $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ 和其导数所作的最簡单的張量。在非完整坐标里有

$$R^{\varkappa'}_{\nu'\mu'\lambda'}=\partial_{\nu'}\Gamma^{\varkappa'}_{\mu'\lambda'}-\partial_{\mu'}\Gamma^{\varkappa'}_{\nu'\lambda'}+\Gamma^{\varkappa'}_{\nu'\rho'}\Gamma^{\rho'}_{\mu'\lambda'}-\Gamma^{\varkappa'}_{\mu'\rho'}\Gamma^{\rho'}_{\nu'\mu'}+\Omega^{\rho'}_{\nu'\mu'}\Gamma^{\varkappa'}_{\rho'\lambda'},$$

其中 $\partial_{\nu'}=A^\lambda_{\nu'}\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$。条件(11.1)所决定的曲綫叫作**近傍曲綫**(écarts géodésiques, geodesic deviation)或**測地离差**。

2．猎振系数 对于 m 自由度的力学系統，我們来考慮 $m+1$ 維的空間，并且按照 § 10.1 的方式将它的一个坐标 x^0 看作时間而写为 t，則在軌道(10.3)的近傍又存在着另一条軌道的条件(11.1)只不过是微小变动的方程。离开正規軌道的偏差卽扰动也有 m 个自由度，可表示为

$$\tilde{\omega}^a \qquad (a=1,2,\cdots,m),$$

对于时間参数，偏差的概念不能成立，所以必須假定

$$\tilde{\omega}^0=0,\quad \frac{d\tilde{\omega}^0}{dt}=\frac{D\tilde{\omega}^0}{dt}=0,\quad \frac{D^2\tilde{\omega}^0}{dt^2}=0.$$

于是就实际的 m 个自由度将(11.1)整理后的結果是

$$\delta f^\alpha=\frac{\delta^2\tilde{\omega}^\alpha}{dt^2}+r^\alpha_\beta\frac{\delta\tilde{\omega}^\beta}{dt}+\nabla_\gamma r^\alpha_\beta \dot{x}^\beta\tilde{\omega}^\gamma+R^\alpha_{\delta\gamma\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma\tilde{\omega}^\delta. \quad (11.3)$$

在此有 $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,\cdots,m$；且 δf^α 仅表示将 f^α 就 m 維所作的絕对微分，有

$$\nabla_\gamma r^\alpha_\beta=\frac{\partial r^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}+\Gamma^\alpha_{\gamma\delta}r^\delta_\beta-\Gamma^\delta_{\gamma\beta}r^\alpha_\delta,$$

$$R^\alpha_{\delta\gamma\beta}=\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta}-\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma}+\Gamma^\alpha_{\delta\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\beta}-\Gamma^\alpha_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\delta\beta}.$$

但都以如下規定作根据：

$$\Gamma^0_{\alpha\beta}=0,\quad \Gamma^0_{\beta0}=\Gamma^0_{0\beta}=0,\quad \Gamma^0_{00}=0.$$

在此导进的張量 $\nabla_\gamma r^\alpha_\beta$ 和 $R^\alpha_{\delta\gamma\beta}$ 的分量都叫作**猎振系数**(coefficients of hunting)。特別是 m 維仿射联絡空間的 Riemann-Christoffel 曲率張量是屬于后者的，Kron 却将 $\nabla_\gamma r^\alpha_\beta$ 叫作**三阶阻力張量**。

由于某些原因而使力学系統离开正規运动的軌道时，用扰动方程(11.3)可以檢查随着时間流逝，扰动是否恒为微小的或者是减衰的还是增加的，从而可以判定系統的稳定及不稳定性。至于其詳細說明，可参照有关机械及力学系統的各种文献❶。

❶　文献[3]，[4]，[8]等。

第 4 章　实际力学系統中的各种复杂性质[1]

§ 12　Hamilton 变分原理

很多的实际力学系統含有电阻及粘性阻力等能量散逸以及关于电流和速度等的非綫性复杂性质。在第 1 及第 2 章我們曾忽略了这些性质而进行几何化的討論，在第 3 章虽曾利用仿射联絡空間考察过含有散逸的系統的几何化問題，但在本章我們却自 Hamilton 变分原理出发，从度量空間的立場来研究散逸及非綫性。

从整个系統看来，古典力学是服从变分原理

$$\delta\int L dt=0$$

的，在此 L 是系統的 Lagrange 函数。若假想該系統具有机械的、电磁的自由度和其他各种自由度，那就可假定这个 Lagrange 函数取最普遍的动态的形状

$$L=\frac{1}{2}\gamma_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v+\gamma_{u0}\dot{x}^u+\frac{1}{2}\gamma_{00}\qquad (u,\ v=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

在此 x^u $(u=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 是 m 个自由度的广义坐标，γ_{uv}，γ_{u0} 及 γ_{00} 是 x^u 的函数，然而也有这个函数是 t 的函数的情形。

利用这个 Lagrange 函数，自

$$y_v=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^v}$$

所定义的广义运动量 y_v 可定义 Hamilton 函数

$$H=y_v\dot{x}^v-L,$$

---

[1] 主要根据文献[13]。

借此可将原来变分原理改写为

$$\delta\int[y_\nu dx^\nu-Hdt]=0,$$

运动方程和测地綫方程可求出如下。

若在此更設想 Hamilton 函数 H 含有系統的势能，而势能仅差一附加常数不定时，那末将 H 写成 $H+H_0$ 的形状也无关系（H_0 是常数）。若将这个附加常数取得十分大，则变分原理

$$\delta\int[y_\nu\dot{x}^\nu-H-H_0]dt=0 \tag{12.1}$$

可修改为

$$\begin{aligned}\delta\int[y_\nu\dot{x}^\nu-H-H_0]dt&=(-H_0)\delta\int\left[1+\frac{H-y_\nu\dot{x}^\nu}{H_0}\right]dt\\&\approx-\sqrt{H_0}\delta\int\sqrt{H_0+2(H-y_\nu\dot{x}^\nu)}dt\\&=-\sqrt{H_0}\delta\int\sqrt{H_0-2L}\,dt.\end{aligned}$$

这个系統的变分方程(12.1)可看作变分条件

$$\delta\int\sqrt{H_0-2L}\,dt=0 \tag{12.2}$$

的近似，而这个变分条件又可看作具有度量

$$ds=\sqrt{H_0-2L}\,dt$$

的空間，卽度量二次微分型为

$$ds^2=g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda \qquad (\varkappa,\lambda=0,1,2,\cdots,m)$$

的 $m+1$ 維 Riemann 空間里测地綫的条件。在此，有

$$x^0=t,\quad g_{uv}=-\gamma_{uv},\quad g_{u0}=g_{0u}=-\gamma_{u0},\quad g_{00}=H_0-\gamma_{00}.$$

于是这个空間的测地綫方程

$$\frac{d^2x^\varkappa}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}=0 \tag{12.3}$$

只不过是变分原理(12.2)的**极值曲綫**的方程，它应該能将原来力学系統的运动方程表示出来。

自这个测地綫方程，我們将导出 m 个自由度的力学系統的运动方程来。在测地綫上取某一任意参数 τ，改写(12.3)得

$$\frac{d^2x^\varkappa}{d\tau^2}+\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}=\frac{1}{2s}\frac{ds}{d\tau}\frac{dx^\varkappa}{d\tau},$$

然后再将这个 τ 看作时間 t，将 x^0 返回到 t，这个方程就分解成两組：

$$\frac{d^2x^u}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}u\\ vw\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}\frac{dx^w}{dt}+2\left\{\begin{matrix}u\\ v0\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}+\left\{\begin{matrix}u\\ 00\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2s}\frac{ds}{dt}\frac{dx^u}{dt}, \tag{12.4}$$

$$\left\{\begin{matrix}0\\ vw\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}\frac{dx^w}{dt}+2\left\{\begin{matrix}0\\ v0\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}+\left\{\begin{matrix}0\\ 00\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2s}\frac{ds}{dt}.$$

容易看出第二式是恒等式，沒有考虑的必要。又方程(12.4)右側出現的 $\frac{1}{2s}\frac{ds}{dt}$，当 H_0 趋向无限大时变为 0，所以所求的运动方程是

$$\frac{d^2x^u}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}u\\ vw\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}\frac{dx^w}{dt}+g^{uw}\left(\frac{\partial g_{vw}}{\partial t}+\frac{\partial g_{0v}}{\partial x^w}-\frac{\partial g_{0w}}{\partial x^v}\right)\frac{dx^v}{dt}$$

$$=-g^{uv}\frac{\partial g_{0u}}{\partial t}-g^{uv}\frac{\partial U}{\partial x^v},$$

在此曾設

$$U=-\frac{1}{2}g_{00}.$$

若在上面的討論中把力学系統看作是静态的，必有

$$\gamma_{u0}=\gamma_{0u}=0,$$

于是

$$g_{u0}=g_{0u}=0,$$

U 变为势能而得到保守系的普通运动方程

$$\frac{d^2x^u}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}u\\ vw\end{matrix}\right\}\frac{dx^v}{dt}\frac{dx^w}{dt}+g^{uw}\frac{\partial g_{wv}}{\partial t}\dot{x}^v=-g^{uv}\frac{\partial U}{\partial x^v}. \tag{12.5}$$

§13 散　　逸

在前节我們用如下观点作了几何化，即将力学系統看作含有一切外在条件的那种系統，从而可将它当作保守系来处理。但若我們观测这个系統而想作工程学的处理，我們仅能就其中的若干个自由度得到一些結果。也就是用統計的形式观测到該系統的平均量而忽視了微小变动的量。这件事实大致可以表述为：前述的所有系統，我們都作为受有非完整約束而观察其行动的。

1. 平均量坐标及变动量坐标　若假定仅能用統計形式来观测，则原来相互无关的自由度也就变成彼此相关的了。因此所有的量都可看作是由平均量和变动量所組成。若用横画（—）表示平均量，用尖号（∧）表示变动量，则向量可作分解，例如

$$dx^{u}:\quad dx^{\bar u},\quad dx^{\hat u}.$$

張量的分解，如

$$g_{uv}:\quad g_{\bar u\bar v},\ g_{\bar u\hat v},\ g_{\hat u\bar v},\ g_{\hat u\hat v}.$$

这也就是将以前的坐标系分解成两个坐标系，一方是平均量坐标系，另一方是变动量坐标系。变动量分量永远服从約束条件

$$\overline{dx^{\hat u}}=\sum_{\hat u}dx^{\hat u}=0.$$

这些約束条件給基于統計观测而得的力学法則加上了非完整的特性。新标数的变化范圍是

$$\bar u,\ \bar v:\quad 1,\ \cdots,\ l(<m);$$

$$\hat u,\ \hat v:\quad l+1,\ \cdots,\ m.$$

2. 散逸系統的运动方程　将前节所得运动方程就平均量坐标及变动量坐标作分解，对于变动量加上約束条件，就可变成仅含平均量的方程。首先，方程(12.5)的 $\bar u$ 分量分解成

$$\ddot x^{\bar u}+\left\{\begin{matrix}\bar u\\ \bar v\bar w\end{matrix}\right\}\dot x^{\bar v}\dot x^{\bar w}+g^{\bar u\bar w}(\partial_t g_{\bar w\bar v})\dot x^{\bar v}$$

$$+\dot{x}^{\bar{v}}\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \hat{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}\dot{x}^{\bar{w}}+\dot{x}^{\hat{w}}\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\hat{w}\end{matrix}\right\}\dot{x}^{\bar{v}}+g^{\bar{u}\hat{w}}(\partial_t g_{\hat{w}\bar{v}})\dot{x}^{\bar{v}}$$

$$+\dot{x}^{\hat{v}}\dot{x}^{\hat{w}}\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \hat{v}\hat{w}\end{matrix}\right\}+g^{\bar{u}w}(\partial_t g_{w\hat{v}})\dot{x}^{\hat{v}}=-g^{\bar{u}w}\partial_w U.$$

在此加上約束条件，卽仅考慮平均量分量的空間，則这个空間的基本張量 $\bar{g}_{\bar{u}\bar{v}}$, $\bar{g}^{\bar{u}\bar{v}}$ 将由

$$\bar{g}_{\bar{u}\bar{v}}=g_{\bar{u}\bar{v}},\quad \bar{g}^{\bar{u}\bar{v}}\bar{g}_{\bar{v}\bar{w}}=\bar{g}_{\bar{w}\bar{v}}\bar{g}^{\bar{v}\bar{u}}=\delta^{\bar{u}}_{\bar{w}},\quad \bar{g}^{\bar{u}\bar{v}}=\bar{g}^{\bar{v}\bar{u}}$$

所决定。更設

$$L^{\bar{u}}_{\bar{v}\bar{w}}=\overline{\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}}-\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}^*,\quad \left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}^*=\bar{g}^{\bar{u}\bar{p}}[\bar{v}\bar{w},\bar{p}],$$

$$L_{\bar{v}\bar{u}\bar{w}}=\bar{g}_{\bar{u}\bar{p}}L^{\bar{p}}_{\bar{v}\bar{w}},\qquad r_{\bar{u}\bar{w}}=\bar{g}_{\bar{u}\bar{v}}r^{\bar{v}},$$

$$r^{\bar{u}}_{\bar{w}}=\overline{2\dot{x}^{\hat{v}}\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \hat{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}}+\overline{g^{\bar{u}\hat{p}}(\partial_t g_{\hat{p}\bar{w}})},$$

$$-A^{\bar{u}}=\overline{\dot{x}^{\hat{v}}\dot{x}^{\hat{p}}\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \hat{v}\hat{w}\end{matrix}\right\}}+\overline{g^{\bar{u}w}(\partial_t g_{w\hat{v}})\dot{x}^{\hat{v}}}+\overline{g^{\bar{u}w}\partial_w U}-g^{\bar{u}\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\bar{U},$$

$$A_{\bar{u}}=\bar{g}_{\bar{u}\bar{v}}A^{\bar{v}}.$$

則得

$$\ddot{x}^{\bar{u}}+\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}^*\dot{x}^{\bar{v}}\dot{x}^{\bar{w}}+\bar{g}^{\bar{u}\bar{w}}(\partial_t\bar{g}_{\bar{w}\bar{v}})\dot{x}^{\bar{v}}+\bar{g}^{\bar{u}\bar{v}}\partial_{\bar{v}}\bar{U}$$

$$+L^{\bar{u}}_{\bar{v}\bar{w}}\dot{x}^{\bar{v}}\dot{x}^{\bar{w}}+r^{\bar{u}}_{\bar{w}}\dot{x}^{\bar{w}}-A^{\bar{u}}=0.$$

这便是包含散逸的自由度 l 的力学系統的运动方程，$r^{\bar{u}}_{\bar{w}}$ 是所謂阻力系数，$A^{\bar{u}}$ 表示势位力以外的外力。又 $L^{\bar{u}}_{\bar{v}\bar{w}}$ 和 $\left\{\begin{matrix}\bar{u}\\ \bar{v}\bar{w}\end{matrix}\right\}^*$ 一起可看作这个 l 維空間的联絡系数。

§14 非 綫 性

在实际力学系統里可以遇到电流飽和現象等广义速度的非綫性問題。在前面关于电机的理論里，某些实际机械的情形也有时

出現这样的非綫性，此时 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}\gamma_{uv}\dot{x}^u\dot{x}^v+\gamma_{u0}\dot{x}^u+\frac{1}{2}\gamma_{00}\qquad(u,\ v=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

的系数 γ_{uv}，γ_{u0} 及 γ_{00} 是 $\dot{x}^u$ 的函数，所以不能通过变分条件和 Riemann 空間联系起来。但是将变分条件的 Euler 方程当作测地綫方程的 Riemann 空間是可以想象的。所以在此用任意参数 τ 改写变分条件

$$\delta\int[H_0-2L]dt=0$$

时，可和上面一样将时間也看作一个坐标而写成 $t=x^0$，并将

$$x^\varkappa\ (\varkappa=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

对于 τ 的导数写成 $x'^\varkappa$。更設

$$F(x,\ x')=\frac{1}{2}[H_0-2L]\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2,$$

則变分条件可改成

$$\delta\int\sqrt{2F(x,\ x')}d\tau=0。\qquad(14.1)$$

命

$$g_{\varkappa\lambda}=\frac{\partial^2F(x,\ x')}{\partial x'^\varkappa\partial x'^\lambda},$$

則因 $F(x,\ x')$ 是 $x'^\varkappa$ 的二次齐次函数，所以(14.1)是度量二次微分型

$$ds^2=g_{\varkappa\lambda}dx^\varkappa dx^\lambda$$

的空間的测地綫条件。此时 $g_{\varkappa\lambda}$ 是 $x^\varkappa$ 及 $x'^\varkappa$ 的函数，而且对于 $x'^\varkappa$ 来說是零次齐次的。这样由 x' 的二次齐次函数导来的空間叫作 Finsler 空間❶，其测地綫方程表面上和 Riemann 空間里的形状相同，卽

$$\frac{d^2x^\varkappa}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\mu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}=0\qquad(\varkappa,\ \lambda,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)。$$

❶ 参閱文献[6]。

所以它的运动方程完全和前节的相同，唯一区别是此时的 $g_{\kappa\lambda}$ 包含着 x'^{κ} 而已。

§ 15 迟滞现象

迟滞(hysterosis)这种复杂性质起源于某些非綫性情况，也可以說是伴随着散逸而发生的。首先要注意这个問題并不能局限于表示强磁体的磁場与磁通关系的 B–H 曲綫所象征的比較单純的現象。实际上，具有迟滞現象的系統的运动，在它的背景空間里由該空間的非完整性所标志出来。在它的背景空間里，撓率及曲率的存在和迟滞現象有关。§ 13 里用統計观測的观点所取的非完整約束，或許就是造成这些影响的主要原因也未可知。总之，将迟滞現象的本质看成和旣知力学条件相結合的背景空間內某些几何学的属性，大概不会錯誤。

附　　录

1. 动态几何学❶

坐标变换不含时間 t 时叫作静态变换，包含 t 时是动态变换。动态变换的一般形状是

$$dx^{i'}=A_i^{i'}dx^i+A_0^{i'}dt \qquad (i,\ i'=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{1}$$

此处 $A_i^{i'}$, $A_0^{i'}$ 是 x^i 及 t 的函数。§6.2 的問題卽 $A_0^{i'}=0$ 的特殊情形。在一般动态变换(1)里，动能已不能保持为速度 $\dot{x}^i$ 的二次型的形状，所以不能再取动能作基础，而取同形状的动势(Lagrange 函数) $L(\dot{x},\ x,\ t)$ 作基础，这样可以求出更一般的运动方程，于是可将 L 設成

$$L=\frac{1}{2}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j+2\alpha_i\dot{x}^i+A), \tag{2}$$

这里 g_{ij}, α_i, A 是 x^i 及 t 的函数，仿 §12 的作法可将它們总起来写成 $\gamma_{\alpha\beta}$. 使(2)保持为不变量的动态变换理論叫作 A. Wundheiler 的动态几何学❷。

今利用(2)建立运动方程，得

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+L^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+2\Gamma^i_j\frac{dx^j}{dt}+\Gamma^i=f^i. \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^i_{jk}&=\left\{\begin{matrix} i \\ jk\end{matrix}\right\}\equiv\frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right),\\ \Gamma^i_j&=\frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial\alpha_h}{\partial x^j}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^h}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial t}\right),\\ \Gamma^i&=\frac{1}{2}g^{ih}\left(2\frac{\partial\alpha_h}{\partial t}-\frac{\partial A}{\partial x^h}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

❶ 这个附录部分和 §6.2 有关。

❷ 参照文献[14]。

它可允許如下几何学的解釋：首先考慮取 $t=x^0$ 的 $m+1$ 維空間，其坐标表示为

$$x^\alpha \qquad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ x^0=t).$$

将(2)取作此空間的度量基本張量，当然取 $g_{i0}=\alpha_i$，$g_{00}=A$。这个空間里所考慮的坐标变换是(1)，再补充上 $dt'=dt$，卽

$$dx^{\alpha'}=A^{\alpha'}_{\alpha}dx^{\alpha},\quad A^{0'}_{\alpha}=0,\quad A^{0'}_{0}=1. \tag{5}$$

其逆变换为

$$dx^{\alpha}=A^{\alpha}_{\alpha'}dx^{\alpha'},\quad A^{0}_{\alpha'}=0,\quad A^{0}_{0'}=1.$$

在这样的条件下，定义滿足某些条件的簡单联絡❶如下。設 $u^\alpha(u^0, u^i)$ 是任意向量，它对于变位 $dx^\alpha(dt, dx^i)$ 的共变微分定义为

$$\left.\begin{aligned}\delta u^i&=du^i+dx^\beta\Gamma^i_{\beta\gamma}u^\gamma,\\ \delta u^0&=du^0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

此处

$$\Gamma^i_{jk}=\left\{\begin{matrix} i\\ jk\end{matrix}\right\},\quad \Gamma^i_{0j}=\Gamma^i_{j0}=\Gamma^i_j,\quad \Gamma^i_{00}=\Gamma^i\quad (\Gamma^0_{\alpha\beta}=0). \tag{7}$$

这是对于空間方向的 Riemann 联絡，对于时間方向的却有不同形式。当平行移动时，向量长度的变化为 $\delta u^2=-2u^0W_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$。$W_{\alpha\beta}$ 叫作**拉伸張量**，它是一种对称的量，在理論上占有重要地位。自由系統的运动可当作这个空間里的測地綫，运动方程(3)可写成

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)=f^i.$$

若采用坐标变换(1)或和它同样的(5)，則得联絡系数的一般变换式

$$\Gamma^{i'}_{\beta'\gamma'}=A^{i'}_{i}A^{\beta}_{\beta'}A^{\gamma}_{\gamma'}\Gamma^i_{\beta\gamma}+A^{i'}_{i}A^{\beta}_{\beta'}\frac{\partial A^i_{\gamma'}}{\partial x^\beta}. \tag{8}$$

在§6.2内采用特殊动态变换

$$dx^\varkappa=C^\varkappa_i dx^i,\quad C^\varkappa_i=C^\varkappa_i(x,\ t). \tag{6.1}$$

❶ 参照文献[15]。

在此情形动能保持为 $\dot{x}^i$ 的二次型的形状，所以可用它作基础而导出运动方程。于是

$$A_i^{i'} \to C_i^{\varkappa}, \quad A_0^i \to 0, \quad \alpha_i \to 0, \quad A \to 0;$$

若 g_{ij} 不含 t，则得

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}, \quad \Gamma_j^i = g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial t} \to 0.$$

施行变换(6.1)，由(8)得

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\varkappa} = C_h^{\varkappa} C_\mu^i C_\nu^j \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + C_i^{\varkappa} C_\mu^k \frac{\partial C_\nu^i}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{0\mu}^{\varkappa} = A_\mu^{\varkappa} = C_i^{\varkappa} \frac{\partial C_\mu^i}{\partial t}, \quad \Gamma_{\mu 0}^{\varkappa} = 0, \quad \Gamma_{00}^{\varkappa} = 0,$$

这又和 § 6.1 完全一致。

又在一般动态变换情形，自任意向量 w^α 或 w_α 有

$$\bar{w}^i = w^i + \alpha^i w^0, \quad \bar{w}_i = w_i,$$

但若作

$$\alpha^i = g^{ij}\alpha_j, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i,$$

则这个量在变换(1)下就必须满足变换律

$$\bar{w}^{i'} = A_i^{i'} \bar{w}^i, \quad \bar{w}_{i'} = A_{i'}^i \bar{w}_i.$$

这种仅用 $A_i^{i'}$ 来表示变换律的量叫作**强張量**。在变换 (6.1) 下，$\bar{w}^i$ 就是这样的强張量。

2. 向 量 記 号 [1]

按照 Gibbs 記法 [2]，用黑体字母表示向量，例如

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}.$$

二向量 **a** 和 **b** 的不定乘积 **a b** 叫作**并矢**(dyad)，若干个并矢的和叫作**并矢式**(dyadic)。若将并矢式 Φ 的各向量分解为直交分量，

---

[1] 这是和 § 8.2 有关的。

[2] 参照文献 [7]。

則得

$$\Phi = a_{xx}\mathbf{ii} + a_{xy}\mathbf{ij} + a_{xz}\mathbf{ik}$$
$$+ a_{yx}\mathbf{ji} + a_{yy}\mathbf{jj} + a_{yz}\mathbf{jk}$$
$$+ a_{zx}\mathbf{ki} + a_{zy}\mathbf{kj} + a_{zz}\mathbf{kk}.$$

这叫作9元数形。并矢式可綜起来用一个二阶張量表示。三个向量的不定乘积叫作**三重量**(triad)，若干个三重量的和叫作**三重量系**(triadic)。在§8.1曾出現

$$\chi = \chi_{11,1}\mathbf{iii} + \chi_{12,1}\mathbf{iji} + \chi_{13,1}\mathbf{iki} + \cdots$$
$$+ \chi_{21,1}\mathbf{jii} + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \chi_{33,3}\mathbf{kkk}.$$

三重量系也可用三阶張量表示。一般，多个向量的不定乘积叫作多重量，若干个同种类多重量的和叫作多重量系。

并矢系和向量間，可以作如下运算

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}, \quad (\mathbf{ab})\times\mathbf{c} = \mathbf{ab}\times\mathbf{c},$$

但运算只在記号邻近的向量間进行。而且記号“·”表示数量积，“×”表示向量积。多重量系間的运算規約和此稍有不同，运算記号可以纵写，自下而上順次就各因子的第一項开始作运算。例如

$$(\mathbf{ab}):(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{cb}\cdot\mathbf{d}, \quad (\mathbf{ab})\overset{\times}{\cdot}(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}\times\mathbf{cb}\cdot\mathbf{d}.$$

在§8.1曾出現三重量系 χ 和并矢 $\mathbf{qq}$ 的二重数量积

$$\mathbf{qq}:\chi = (\chi_{11,1}q_xq_x + \chi_{12,1}q_xq_y + \cdots + \chi_{33,1}q_zq_z)\mathbf{i}$$
$$+ (\chi_{11,2}q_xq_x + \chi_{12,2}q_xq_y + \cdots + \chi_{33,2}q_zq_z)\mathbf{j}$$
$$+ (\chi_{11,3}q_xq_x + \chi_{12,3}q_xq_y + \cdots + \chi_{33,3}q_zq_z)\mathbf{k}.$$

参考文献

[1] Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry, **1**, B (Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, Tokyo, 1955).

[2] J. L. Synge and A. Schild: Tensor Calculus (Univ. of Toronto Press, 1949).

[3] J. A. Schouten: Tensor Analysis for Physicists (Oxford, Clarendon Press, 1951).

[4] E. T. Whittaker: Analytical Dynamics, 4th ed., (Cambridge, University Press, 1937).

[5] G. Kron: Equivalent Circuits of Electric Machinery (John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1951).

[6] E. Cartan: Les espaces de Finsler (Hermann, Paris, 1934).

[7] J. W. Gibbs and E. B. Wilson: Vector Analysis (Yale University Press, New Heaven, 1929).

[8] G. Kron: Non-Riemannian Dynamics of Rotating Electrical Machinery, Journal of Mathematics and Physics, **13**, 2 (1934), 103～194.

[9] K. Kondo and Y. Ishizuka: Recapitulation of the Geometrical Aspects of Gabriel Kron's Non-Riemannian Electrodynamics, Memoirs of U. S. G., **1**, B-I (1955), 185～239.

[10] G. Kron: A Physical Interpretation of the Riemann-Christoffel Curvature Tensor, Tensor, **4**, 3 (1955), 150～172.

[11] K. Kondo: On the Dynamics of the Aeroplane and Non-Riemannian Geometry, I, II, Journal of the Japan Society of Aeronautical Engineering, **2**, 7, 8 (1954), 161～166, 191～196.

[12] K. Kondo: Geometry of Paths as applied to the Theory of Dynamical Systems, Memoirs of U. S. G., **1**, B-IV (1955), 316～334.

[13] K. Kondo and M. Fujinaka: Geometrization of Dissipation and General Non-Linearity in Dynamical Equations with Preliminary Reference to Hysteresis, Memoirs of U. S. G., **1**, B-V (1955), 335～355.

[14] A. Wundheiler: 'Rheonome Geometrie', Absolute Mechanik, Prace Matematycznofizyczne Warszawa, **40**, 2 (1933), 97～142.

[15] N. Oshima: Survey of Rheonomic Aspects in Problems of Dynamics, Memoirs of U. S. G., **1**, B-II (1955), 240～247.